Pollak

Sammlung
arithmetischer und algebraischer
Aufgaben

von

Dr. Fr. X. Pollak,
Rector und Professor am k. Lyceum zu Dilingen, Mitglied der naturforschenden Gesellschaft zu Bamberg.

Erste Abtheilung.

Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage.

Augsburg,
Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.
1857.

Vorwort

zur ersten Auflage.

Wer in was immer für einer Kunst oder Sprache große Fortschritte machen will, der muß sich darin üben; und wer in der Mathematik die erwünschte Fertigkeit erlangen will, der darf sich nur üben und — wieder üben; denn nicht ein bloßes Zusehen oder Zuhören, sondern Uebung macht den Meister. — Man muß sich selbst versuchen, man muß auf Hindernisse stoßen, man muß Fehler machen, — kurz man muß das Gehen probirt haben und sogar öfter gefallen sein, ehe man einen festen und sichern Schritt haben kann.

Da nun ein angehender Mathematiker seine mathematische Kraft am Besten an recht vielen verschiedenen Aufgaben versucht und versuchen soll, und da neue Beispiele frischen Muth geben, so entschloß ich mich, diese Sammlung von Aufgaben den bereits vorhandenen Sammlungen der Art beizugesellen.

Die Zahl dieser Aufgaben (über 1600) kann noch auf mannigfache Weise vergrößert werden. Es können bekanntlich Beispiele der Multiplikation in solche der Division, Beispiele der Potenzirung in solche der Radicirung — und umgekehrt —

verwandelt werden. Aehnliche Verwechselungen und Erweiterungen bieten die Beispiele für Logarithmen und Progressionen dar; endlich können sogar einige verwickeltere Aufgaben in mehrere einfachere zerlegt und theilweise gemacht werden. Ein Lehrer kann überdieß nach Bedarf durch wenige Veränderungen zusammengesetztere Aufgaben einfacher, sowie umgekehrt diese zusammengesetzter machen.

Gütige Mittheilungen von etwa vorkommenden Unrichtigkeiten werden mit verbindlichstem Danke angenommen; und sollte sich diese Sammlung einer günstigen Aufnahme erfreuen, so dürfte bald eine Fortsetzung nachfolgen.

Dilingen, den 9. März 1840.

Der Verfasser.

Vorwort
zur zweiten Auflage.

An den Aufgaben selbst habe ich in dieser zweiten Auflage keine Vermehrung, ja beinahe keine Aenderung vorgenommen. — Die Fragen aber wurden, mehrseitigen Wünschen zufolge, bedeutend erweitert, und an sie zugleich Beispiele angereiht, welche sehr viele von den Fehlern enthalten, die am häufigsten von jenen Schülern gemacht werden, denen eine klare Einsicht in die mathematischen Gesetze noch abgeht.

Durch diese Beigabe ist aber die Aufgaben=Sammlung selbst indirekter Weise sehr vermehrt worden. — Der Schüler hat nämlich bei einem jeden von diesen Beispielen 1) nachzuforschen, durch welche irrige Ansicht oder Auffassung diese Fehler entstanden sind, und zugleich zu bestimmen, gegen welche bekannten Regeln sie verstoßen, 2) anzugeben, was man bei richtigem Verfahren hätte erhalten sollen; es wird endlich 3) verlangt, daß sodann das fehlerhaft Deducirte (d. i. die rechte Gleichungsseite, die deducirte Gleichung) als richtig angesehen, dafür die Angabe (d. i. die linke Gleichungsseite, die gegebene Gleichung) als unrichtig betrachtet und so umgeändert werden soll, daß sie alsdann der Deduktion vollkommen entspricht.

Uebrigens kann sich der Schüler jener geheimen Freude, selbst den corrigirenden Lehrer machen oder selbst tadeln zu dürfen, nur dann ungestört hingeben, wenn er zuvor durch genaue

Beantwortung der vorausgehenden Fragen seine Tüchtigkeit hiezu bewährt hat; denn im entgegen gesetzten Falle würde er die Anzahl der Fehler durch neue nur vermehren.

Nach einer Vorbereitung und Vorübung der Art wird der junge Mathematiker bei der Bearbeitung der eigentlichen Aufgaben gewiß sich leicht und sicher bewegen.

Die Herren Recensenten werden bei Betrachtung dieser neuen Auflage die Ueberzeugung gewinnen, daß ich ihre freundlich gegebenen Winke, insoferne sie meiner Ansicht und meinem Plane nicht entgegen waren, sorgfältig beachtet habe.

Herr Professor Faber zu Kaiserslautern hat durch seine Schüler sämmtliche Aufgaben lösen lassen, die hiebei entdeckten Unrichtigkeiten gesammelt und ein Verzeichniß hievon zu geeignetem Gebrauche mir zu übermachen die Güte gehabt. Ich halte mich für verpflichtet, Ihm im Namen Aller, welche diese Aufgaben zu benützen gedenken, hier öffentlich meinen Dank darzubringen; denn gerade durch diese gefällige Mittheilung ward unsrer Sammlung der Stempel der Correktheit aufgedrückt.

Leider! haben sich in die neue Auflage mehrere Druckfehler eingeschlichen; ich habe dieselben, ja sogar bloße Undeutlichkeiten, am Ende bemerkt, und dadurch, so hoffe ich, diese Auflage so correkt als möglich gemacht.

Gewiß gebührt dem Herrn Verleger für die schöne Ausstattung des Werkes alles Lob, um so mehr, als er ungeachtet der Vermehrung der Bogen-Anzahl den Preis unverändert läßt.

Möge nun diese Sammlung in ihrem neuen Gewande nicht minder willkommen sein, als sie es in ihrem alten gewesen war! —

Dilingen im Juli 1845.

Der Verfasser.

Vorwort
zur dritten Auflage.

Die gegenwärtige Auflage hat einige Aenderungen, Verbesserungen und Zusätze erhalten, so daß sie allen Anforderungen entsprechen dürfte. — Nur dem einem Wunsche, diese Aufgaben-Sammlung mit noch einigen Beispielen leichter Art zu vergrößern, habe ich zur Zeit nicht nachkommen können, theils wegen Mangel an Zeit, theils um keine Veranlassung zu geben, daß der Ladenpreis erhöht werden müßte.

Da die zwei Aufgaben über einfache Gleichungen mit mehreren Unbekannten Nro. 39. und 40. einigen Censoren wiederholt auffielen, weil sie übersehen zu haben scheinen, daß ich dieselben absichtlich als sogenannte Vexirgleichungen gegeben habe, — und zwar mit Beziehung auf die der Abtheilung jener Gleichungen vorangehende Frage Nro. 2. —, so wurde auf sie durch ein Sternchen (*) aufmerksam gemacht.

Mit Freude hat mich die Nachricht erfüllt, daß in der letzten Zeit nun auch im eigenen Vaterlande diese Sammlung sich zu

verbreiten, also die bisherige Scheu, auch an schwierige Aufgaben sich zu wagen, unter meinen jungen Landsleuten zu verschwinden beginnt. — Nur Muth, junge Freunde der Mathematik, und Eure Mühe bleibt nicht unbelohnt! —

Dilingen im Mai 1851.

Der Verfasser.

Vorwort

zur vierten Auflage.

Diese Auflage hat nebst mehreren Verbesserungen auch einige Zusätze erhalten. Erstere sowie letztere verdanken ihr Dasein den freundlichen Andeutungen von Fachmännern, wofür den innigsten Dank auszusprechen ich mich gedrungen fühle, indem ich zugleich hiemit die ergebenste Bitte verbinde, fernere Mittheilungen gütigst mir zukommen lassen zu wollen.

Unter den Zusätzen mache ich besonders auf die Aufgaben im Anhange am Ende des Buches über das Rationalmachen eines jeden mit ganz beliebigen Wurzelgrößen behafteten Binomialnenners aufmerksam, da dergleichen Aufgaben in Sammlungen der Art bisher wenig hervorgehoben worden sind. Diese Aufgaben sind so gestellt, daß sie ein Lehrbuch bezüglich der Lösung entbehrlich erscheinen lassen dürften; es würde auch das Rationalmachen in

dieser Allgemeinheit in manchem mathematischen Lehrbuche vergeblich gesucht werden.

Möchte dieser neuen Auflage gleich den vorausgehenden eine höchst dankenswerthe Würdigung von Seite der Herren Censoren zu Theil werden!

Dilingen im Mai 1857.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

II. Abschnitt.

Aufgaben über Buchstabenrechnung.

III. Abschnitt.

Aufgaben über Potenz- und Wurzelgrößen.

IV. Abschnitt.

Aufgaben über Gleichungen vom ersten und zweiten Grade.

V. Abschnitt.

Aufgaben über Verhältnisse, Proportionen, Progressionen und Logarithmen.

Einleitung.

Damit diese Sammlung von Aufgaben auch dem Selbststudirenden die geeigneten Dienste leiste, so will ich die Hauptpunkte, durch welche die Auflösung jeder Aufgabe mit dem erwünschten Erfolge möglich wird, kurz andeuten.

I. Das erste und unerläßlichste Erforderniß ist: **sich mit den mathematischen Gesetzen, welche die Bearbeitung und Auflösung irgend einer Aufgabe bedingen, vollkommen vertraut gemacht zu haben.** Deßwegen sind jeder Beispielgattung Fragen vorgesetzt, welche, da man sich auf kein besonderes Lehrbuch bezog, die Stelle des prüfenden Lehrers vertreten und überhaupt anzeigen, mit welchen Waffen der kommende Feind zu bekämpfen und zu besiegen sei. Jede dieser Fragen muß man vollständig zu beantworten wissen und die Antworten dem Gedächtnisse um so sorgfältiger einprägen, als sich in den spätern Aufgaben immer wieder die frühern mathematischen Gesetze wiederholen.

Sobald eine der frühern Regeln entweder ganz oder zum Theil dem Gedächtnisse entflogen ist oder mit andern verwandten und ähnlichen vermengt oder verwechselt wird, ergänze man sogleich diesen Mangel und hebe diese Unsicherheit; denn Nichts

verleitet leichter zu fehlerhaften Resultaten, zum Ueberdruß und zur Unlust im Arbeiten, als Halbheit und Unsicherheit in den mathematischen Gesetzen.

II. Man lerne mathematisch lesen, d. h. man erwerbe sich eine richtige Kenntniß von der Bedeutung aller mathematischen Zeichen und spreche sie immer deutlich aus.

Obgleich nun diese Zeichen aus jedem mathematischen Lehrbuche bekannt sind, so werde ich dennoch, theils wegen ihrer Wichtigkeit, theils weil sie nicht immer so berücksichtigt werden, als sie müssen, die hieher gehörigen aufzählen und eine kurze Erklärung derselben beifügen, indem ich überzeugt bin, daß diese Vorarbeit den Auflösungen dieser Aufgaben sehr zu Statten kommen wird.

Wir unterscheiden zuvörderst Quantitäts- und Operationszeichen.

Zu den Quantitätszeichen rechnen wir:

a. Die bekannten neun arabischen Ziffern nebst der Nulle und dem mathematisch Unendlichgroßen:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \ldots\ldots \infty\,.$$

Die neun arabischen Ziffern behalten für sich ihre bekannten Benennungen (eine, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun Einheiten) immer bei und erleiden bei Zusammensetzungen in der Aussprache nur unbedeutende Veränderungen, welche bei der Erklärung des Decimalsystemes angegeben zu werden pflegen und darum hier füglich übergangen werden können. So lange diese Quantitätszeichen keinen andern Namen, als den der Einheit, bekommen, heißen sie unbenannte Zahlen; wird aber durch einen weitern Beisatz die Art der Einheit näher bestimmt, z. B. 3 Einheiten von Gulden, 4 Einheiten von Aepfeln, so heißen sie benannte Zahlen. — In letzterer Beziehung wird der allen Zahlen gemeinsame Name „Einheit" zur Abkürzung im Sprechen ausgelassen, indem man nur 3 Gulden, 4 Aepfel u. dgl. zu sagen

pflegt. Man dehnt diese Bequemlichkeit sogar auf das Anschreiben aus, indem die Ziffer „1" sowohl als Coefficient wie auch als Exponent weggelassen wird; sie muß jedoch, wenigstens während des Rechnens, wie wenn sie wirklich angeschrieben wäre, abgelesen werden, so daß man z. B. ein a und ein b (noch genauer ein a in der ersten und ein b in der ersten Potenz) statt bloß a und b zu lesen hat.

Die Nulle (0) hat keinen Inhalt und ist deßhalb überhaupt dahin zu setzen, wo die Abwesenheit einer Größe oder Zahl angedeutet werden muß. — Gewöhnlich wird sie durch Null oder keine Einheit, bei zusammengesetzten Zahlen aber in der Regel gar nicht ausgesprochen. Man vermeide daher jede andere Leseart, welche der angegebenen Bestimmung der Nulle nicht entspricht, und darum unmathematisch, unrichtig ist; wohin namentlich der Ausdruck „es geht auf" statt „es gibt Null" gehört, zumal da eben dieser Ausdruck bei Brüchen, wenn im Zähler und Nenner gleiche Faktoren vorkommen, gleichbedeutend mit dem ebenso fehlerhaften „es hebt sich auf" gebraucht wird.

Das Zeichen des Unendlichgroßen (∞), welches ohnedieß nur höchst selten hier vorkommen wird, vertritt die Stelle einer solchen Größe, die wegen ihres unermeßlichen Inhaltes durch keine wirkliche Zahl ausgedrückt werden kann, und wird in der Aussprache durch Unendlichgroß gegeben.

b. Um bestimmte Mengen von Einheiten z. B. von acht, von vier und zwanzig, von sechzig Einheiten u. dgl. auszudrücken, dazu sind die wenigen arabischen Ziffern allerdings hinreichend. Wie könnte man aber durch dieselben auch unbestimmte, beliebige oder irgend welche Mengen ausdrücken? — Durch welche Zusammensetzung von arabischen Ziffern ließen sich wohl die Worte: eine gewisse Größe, irgend eine andere und wieder eine andere Größe u. s. f. geben? — Die Ziffer 2 kann zwar gebraucht werden, um zwei Gulden, zwei Pfund, zwei

Bäume — kurz um zwei Dinge, aber nie mehr und nie weniger als zwei, zu bezeichnen. Es war also nothwendig, daß die Mathematik andere, obigen allgemeinen Größenbegriffen entsprechende Zeichen wählte, Zeichen, die in sich kein bestimmtes Quantum einschließen und deßhalb jede mögliche Größe vorstellen können. Solche allgemeine Größenhüllen sind nun a, b, c .... x, y, z, (auch A, B, C .... und α, β, γ ....), welche — ich möchte sagen zufälliger Weise — auch Buchstaben sind; denn mit Buchstaben als solchen hat es die Mathematik nie zu thun, an Buchstaben als solche hat kein Mathematiker zu denken. Wer in der That einen Buchstaben mit einem Buchstaben z. B. multipliciren wollte, der könnte eben so leicht ein Haus mit einem Hause u. dgl. multipliciren. — Man spricht diese Zeichen zwar wie die Buchstaben aus, man sollte sie aber strenge genommen in der Uebersetzung mit den Worten Größe, irgend eine Größe, irgend eine andere, eine dritte Größe u. s. w. geben.

c. Zahlen und Buchstaben werden noch in einer andern Bedeutung, nämlich als sogenannte Indices, Zeiger, gebraucht, um verschiedene Größen, wenn sie durch einerlei Buchstaben ausgedrückt sind, von einander unterscheiden zu können. Sie werden in dieser Beziehung gewöhnlich rechts unten an den Buchstaben gesetzt, z. B. a_1 a_2 a_3 .... a_n, und durch a primae classis oder a primi ordinis, oder kurz durch a prim., a secund. etc. abgelesen.

d. Selbst das Komma (,) gehört zu den Quantitätszeichen, in so ferne es bei Decimalbrüchen vorkommt, und wird entweder gar nicht ausgesprochen oder mit dem Worte Ganzes oder Ganze gegeben.

Dasselbe Komma kommt auch einfach und wiederholt als Index bei der zum Aussprechen vielzifferiger Zahlen üblichen Classifikation vor, wo es der Stellung gemäß den Namen Tausend, Million, Billion u. s. w.

erhält; ferner als Inder bei Buchstaben, wo es bloß die Stelle obiger Indices vertritt und wie diese gelesen wird; z. B. x' x'' x''' u. dgl.

e. Klammern (. . .) oder Haken [. . .] bezeichnen, daß mehrere Größen zusammen als eine einzige zu betrachten und so zu behandeln seien. Sie sind höchst wichtige Zeichen und verdienen eine weit größere Aufmerksamkeit, als man denselben nicht selten zu schenken scheint. Sie müssen so lange während des Kalkuls beibehalten werden, als mehrere Größen für eine gelten sollen und können in der Wortsprache durch Alles, Alles dieses, Alles zusammen u. dgl. gegeben werden.

Eine gleiche Bedeutung und Bezeichnung hat auch der sogenannte Bruchstrich noch neben seiner eigentlichen, wenn der Zähler des Bruches mehrgliederig ist; deßwegen muß, sobald der Nenner verschwindet, das bisher verschwiegene, oder vielmehr das durch den Bruchstrich zugleich ausgedrückte Klammerzeichen entweder gesetzt oder die damit verbundene Zeichenänderung oder sonstige Rechnung sogleich vorgenommen werden, — ein Fall, der gar oft bei der Reduktion der Gleichungen vorkommt.

f. Endlich gehören wohl hieher noch die Ungleichheitszeichen ($<$, $>$) und das Gleichheitszeichen ($=$); letzteres verbindet zwei gleiche oder als gleich zu betrachtende Ausdrücke und wird gewöhnlich durch: ist gleich, ist äqual, ist eben so groß als, oder durch gibt, man erhält u. dgl. ausgesprochen; erstere werden zwischen zwei ungleiche Größen gesetzt — nach Umständen eines oder beide zugleich — und durch kleiner als oder größer als, je nachdem die Spitze zur Linken oder zur Rechten schaut, abgelesen.

Zu den Operationszeichen gehören alle jene, welche irgend ein Rechnungsverfahren und zwar theils als ein erst zu verrichtendes, theils als ein bereits verrichtetes anzeigen. Diese

Zeichen sind es vorzüglich, welche die Größen unter sich wie einzelne Worte zu einem Satze verbinden; durch sie werden die todten Quantitätszeichen belebt; durch sie wird, so zu sagen, die Aufgabe zur Aufgabe; sie sind es, welche hauptsächlich das Sprachliche der Mathematik ausmachen.

Die wichtigsten hieher gehörigen sind:

a. Das Zeichen der Addition (+); es verbindet nur je zwei Glieder zu einem, indem es entweder deren Ineinsbildung verlangt oder diese als bereits geschehen anzeigt; denn a + b kann heißen: man soll a zu b addiren oder auch, man erhält a + b, wenn man a zu b addirt hat. Es wird übersetzt durch plus, durch und, und dazu oder durch die Summe von, und kann weder beim Schreiben noch beim Aussprechen ausgelassen oder verschwiegen werden.

b. Das Zeichen der Subtraktion (—); bei diesem gilt dasselbe wie bei dem der Addition; es wird durch minus, durch davon abgezogen oder kurz davon und durch die Worte die Differenz oder der Unterschied von gegeben.

Diese beiden Zeichen + und — kommen auch noch in einer ganz andern Bedeutung vor, nämlich um einen Gegensatz der Größen zu bezeichnen. Sie hören dann auf, Operationen auszudrücken, und werden zu bloßen Qualitätszeichen; jenes wird durch positiv oder additiv, dieses durch negativ oder subtraktiv ausgedrückt. Man hätte in dieser Beziehung eben so gut ganz neue Zeichen wählen können, um jede Zweideutigkeit zu vermeiden; da aber der Gegensatz zweier Größen mit der Subtraktion selbst zusammen fällt, so kann er auch wohl durch das nämliche Zeichen angezeigt werden. Das eine Qualitätszeichen (+) wird meist verschwiegen, indem es ja genügt, wenn der Gegensatz durch ein einziges Zeichen (—) hervorgehoben oder angedeutet wird; letzteres darf daher nie ausgelassen werden.

Hat eine allein stehende Größe das Zeichen (—) vor sich, so kann dieses demnach als Qualitätszeichen, sowie als Operationszeichen angesehen werden, indem z. B. — a so viel als o + (— a) oder o — (+ a)

sein kann. Auf gleiche Weise ist a — b so viel als a + (— b) oder als a — (+ b), sowie a + b entweder für a + (+ b) oder für a — (— b) genommen werden kann. Bekanntlich können auf diese Art Differenzen in Summen und umgekehrt Summen in Differenzen in formeller Beziehung verwandelt werden.

c. Das Zeichen der Multiplikation (×) oder (.); es verbindet ebenfalls je zwei Größen zu einer und wird durch die Worte multiplicirt, mal oder das Produkt von ausgedrückt.

Sind beide dieser verbundenen Größen Buchstaben oder Klammerausdrücke, oder ist wenigstens die nach dem Zeichen stehende ein Buchstabe oder eine Klammergröße und positiv, so kann das Zeichen weggelassen werden; sobald aber an die Stelle der Buchstaben bloße Zahlen kommen, muß es wieder gesetzt werden.

Mehrere Punkte hintereinander (. . . . .) zeigen eine Lücke, eine Unvollständigkeit, die Nichtvollendung einer Operation u. dgl. an, werden also in solchen Fällen gebraucht und gewöhnlich durch und so fort übersetzt.

d. Das Zeichen der Division hat denselben Zweck und ist auch zweierlei Art, nämlich (:), wenn die beiden zu verbindenden Größen hintereinander und (—), wenn dieselben übereinander gestellt werden; beide werden mit getheilt durch, dividirt durch, der Quotient von, — letzteres auch mit gebrochen durch, mit Bruch oder gebrochene Zahl im Lesen gegeben. — Niemals darf ein solches Zeichen ausgelassen werden.

Werden zwei (gleiche) Differenzen oder zwei (gleiche) Quotienten durch das Gleichheitszeichen verbunden, so erhalten die vorkommenden Zeichen, in so ferne solche Gleichsetzungen als Proportionen genommen werden, andere Benennungen, weil auch die die Differenzen und Quotienten bildenden Größen hier in einer andern Ordnung, in verkehrter nämlich, zu nehmen sind; so wird z. B. a — b = c — d und a : b = c : d

bekanntlich durch es verhält sich a zu b ebenso wie sich verhält c zu d, — abgekürzt a zu b wie c zu d — gegeben, wobei auf das Gleichheitszeichen die Worte ebenso wie oder bloß wie treffen. Genau und vollständig sind diese Gleichungen so zu lesen: in der ersten ist ein a um ebenso viel größer (oder kleiner) als ein b, um wie viel ein c größer (oder kleiner) als ein d ist; in der zweiten ist ein a eben so vielmal größer (oder kleiner) als ein b, wie vielmal ein c größer (oder kleiner) als ein d ist. — Uebrigens ist es zweckmäßiger, um diese Mehrdeutigkeit der Zeichen zu vermeiden, solche verkehrte Differenzen und Quotienten durch ganz andere Zeichen auszudrücken, wie folgende ziemlich häufig gebräuchliche Schreibweise zeigt: $a \div b = c \div d$ und $a :: b = c :: d$.

e. Die Zahlen und Buchstaben, welche für sich betrachtet — d. i. im ersten Stockwerke des mathematischen Größengebäudes — nur Quantitätszeichen sind, bekommen, sobald sie im zweiten Stockwerke, d. i. als Exponenten erscheinen, zu ihrer ursprünglichen noch eine Operations-Bedeutung und zwar die der Multiplikation. Sie sind jedoch bloße Abkürzungszeichen im Schreiben; statt a. a. a. a. a oder a a a a a schreibt man nämlich kürzer a^5 und spricht: a in der Potenz 5 oder auch a in der 5^{ten} Potenz. Ebenso schreibt man allgemein statt a. a. a. a . . . . m kürzer a^m und spricht: a in der Potenz m, a in der m^{ten} Potenz, oder a potenzirt durch m, endlich auch, jedoch minder entsprechend, a hoch m. Ihre Bedeutung, da sie Faktorenzeichen sind, ergibt sich nun von selbst. Ein Exponent bezieht sich nur auf die Größe, über welcher er steht; soll er sich über mehrere zugleich erstrecken, so hat man diese Größen einzuklammern und dem Exponenten die Stelle rechts außer der Klammer so anzuweisen, als wenn sie nur ein Buchstabe wäre. — Die durch die Exponenten angezeigte Operation heißt mit einem Worte Potenzirung.

f. Das Zeichen des dem Potenziren entgegengesetzten Verfahrens, des Wurzelausziehens, oder Radicirens, ist ein sehr verzogenes r (als der Anfangsbuchstabe

des Wortes radix), nämlich $\sqrt{}$, in dessen Oeffnung der Exponent — hier Wurzelexponent, auch Radikator genannt — geschrieben wird; dieser deutet die Anzahl der gleichen Faktoren an, aus welchen die Potenz unter oder hinter dem Zeichen entstanden ist: so bezeichnet $\sqrt[5]{a}$, man soll die Wurzel oder den Dignand der fünffaktorigen Potenz a angeben, welches durch die 5te Wurzel aus a, oder auch a radicirt durch 5 abgelesen wird. Ebenso zeigt allgemein $\sqrt[m]{a}$ an, daß man die Wurzel oder den Dignand der m faktorigen Potenz a angeben soll; man drückt dieses Verfahren durch mte Wurzel aus a oder von a, oder a radicirt durch m aus.

Besteht die hinter dem Zeichen befindliche Potenz aus Gliedern, so müssen diese eingeklammert oder durch einen von dem Wurzelzeichen abgehenden horizontalen Strich, der dann die Stelle von Klammern vertritt, als eine Größe bildend bezeichnet werden. — Bei sehr vielen Gliedern, und namentlich wenn diese in einer Zeile nicht Platz haben, sind die Klammern zu gebrauchen, weil der Wurzelstrich, sowie der Bruchstrich, nur dann die Stelle von Klammern zugleich vertritt, wenn er nicht unterbrochen wird, weßhalb er nie von einer Zeile auf die andere fortgesetzt werden darf.

Bekannt ist, daß Wurzelgrößen als Potenzgrößen, und umgekehrt, geschrieben werden können; das Eine sowohl als das Andere kann bei manchen Aufgaben mit Vortheil angewendet werden.

g. In dem Combinationskalkul gebrauchen wir die Zeichen:

α) nP, um anzuzeigen, daß für gegebene Elemente die Anzahl der möglichen Versetzungen oder Permutationen bestimmt werden soll; man setzt dieses Zeichen vor die gegebenen Elemente und liest es ab durch numerus permutationum.

β) nC_1 nC_2 nC_3 . . . , um auszudrücken, daß für gegebene Elemente die Anzahl der Gruppen mit je einem, zu je zwei, zu je drei u. s. w. Elementen gesucht werden soll; man schreibt diese Zeichen ebenfalls vor die Elemente und übersetzt sie durch numerus combinationum der ersten, zweiten, dritten ꝛc. Klasse oder auch der Estratto, Ambo, Terno etc.

γ) nV_1 nV_2 nV_3 . . . sind Zeichen, welche in Bezug auf Variationen dieselbe Bedeutung haben, wie die vorigen, und durch numerus variationum der ersten, zweiten, dritten ꝛc. Klasse abgelesen werden.

h. Für die Logarithmen hat man die Zeichen log, loglog u. s. f., welche unmittelbar vor die Größe, deren Logarithmus angegeben werden soll, gesetzt und durch logarithmus, logarithmus logarithmi u. s. f. ausgedrückt werden.

Soll umgekehrt zu einem Logarithmus die zugehörige Zahl aufgesucht werden, so zeigt man dieses durch num log (numerus logarithmi), num loglog u. s. w. an.

Derjenige, welcher die Logarithmen der neun arabischen Ziffern auswendig weiß, ist im Besitze mancher Vortheile und gewinnt bei der Bearbeitung logarithmischer Aufgaben sehr viel an Zeit! —

III. Man schreibe deutlich, und mathematisch richtig, d. h. man schreibe so, daß das Geschriebene zu jeder Zeit nicht nur von dem eigenen Arbeiter, sondern von jedem andern Sachverständigen ohne Anstand und ohne Zweifel (wegen Zweideutigkeit) gelesen werden kann.

Man bringt aus den Anfangsgründen des arithmetischen Unterrichtes eine gewisse Ordnung im Schreiben mit, die nicht immer den zu gebrauchenden mathematischen Zeichen entspricht und darum eine deutliche mathematische Schrift nicht begründet; man entsage daher ein für allemal jeder Willkür, und gewöhne

sich selbst im Schreiben an jene der Mathematik gebührende Genauigkeit und strenge Ordnung; denn eine undeutliche Schrift, wodurch für den eigenen Arbeiter Verwechselungen entstehen können, oder die Vernachlässigung auch nur eines einzigen Zeichens sind hier wegen der nachtheiligen Folgen weit weniger verzeihlich, als in andern Sprachen.

Ich will, nicht zum Ueberflusse, nur einige die Deutlichkeit und Genauigkeit betreffende Punkte aufzählen.

1. Gar gerne werden sogenannte Nebenrechnungen unter die Hauptrechnung gemengt.

2. Sehr häufig werden Klammern entweder gar nicht gemacht oder zur Unzeit und ohne die allenfalls nöthige Zeichenänderung weggelassen.

3. Nicht selten wird das Qualitätszeichen (—) hauptsächlich darum, weil es nicht mit der Größe zugleich gedacht oder ausgesprochen wird, im Schreiben vergessen.

4. Daß man in einer geraden, horizontalen Richtung schreiben soll und daß eine Zeile nicht füglich in der Mitte eines Gliedes beendigt werden kann, bedürfte wohl kaum der Erwähnung, wenn nicht gar zu oft dagegen gefehlt würde. Wie oft werden nicht die Zeichen in ungleicher Höhe angebracht und namentlich der Bruchstrich verhältnißmäßig zu tief gesetzt oder wohl gar schief gemacht? Würde Jemand in irgend einer andern z. B. lateinischen Schrift den einen Buchstaben höher als den andern, das eine Wort höher als das andere schreiben, so würde dieß ohne Zweifel höchst lächerlich und tadelnswerth befunden; aber dergleichen Albernheiten in der mathematischen Schrift zu begehen, scheut man sich nicht.

5. Die Zeilen selbst folgen nicht immer mit den nöthigen Zwischenräumen aufeinander, so daß die Exponenten nicht hoch genug und auch nicht immer in gleicher Höhe zu stehen kommen können.

6. Dem Wurzelzeichen wird, besonders wenn es vor Brüchen und Polynomien steht, gar oft die nöthige Ausdehnung nicht gegeben, so daß es zweifelhaft ist, ob nur der Zähler oder der ganze Bruch, ob nur einige oder alle Glieder unter das Wurzelzeichen gehören.

7. Erleiden einige Glieder oder auch nur ein Glied einer Gleichung eine Veränderung, so ist die ganze Gleichung frisch zu schreiben; auch gewöhne man sich nicht daran, das Verschwinden von einzelnen Größen oder ganzen Gliedern durch ein sogenanntes Ausstreichen bemerkbar zu machen. — Bei Gleichungen mit mehreren Unbekannten müssen die neu deducirten Gleichungen durch fortlaufende Nummern oder durch Buchstaben markirt werden; u. a. m.

IV. Jede, besonders eine etwas zusammengesetzte Aufgabe muß, ehe man zur Auflösung schreitet, gehörig zergliedert oder analysirt werden, d. h. man muß angeben, was dieselbe überhaupt vorstelle, in welcher nähern und entferntern Verbindung die einzelnen oder Theilgrößen zu einander stehen, in welcher Ordnung die Theilrechnungen vorzunehmen seien u. dgl., wobei man sich zugleich an die Regeln, welche in dieser Aufgabe in Anwendung kommen werden, zu erinnern hat, oder besser sie wirklich angibt — hersagt.

Was hat man zu thun, wie soll und kann es geschehen? Dieß sind die Fragen, welche man sich, bevor man einen Federzug macht, vollständig zu beantworten hat. — Wäre z. B. als Aufgabe gegeben

$$\log \frac{0{,}48a^4}{(x-2)\sqrt[5]{b}},$$

so würde man etwa sagen: hier soll der Logarithmus eines Bruches, dessen Zähler ein Produkt aus einem Decimalbruche und einer Potenz und dessen Nenner ebenfalls ein Produkt aus

zwei Faktoren ist, von denen der eine ein Binomium, der andere eine Wurzelgröße ist, angegeben werden. Wie wird nun der Logarithmus eines gemeinen Bruches, eines Produktes, eines Decimalbruches, einer Potenz, eines Binomium und einer Wurzelgröße bestimmt?

Oder wenn gegeben wäre

$$\left(3\frac{1}{2}\,a^4\sqrt{b} - 0{,}6a^{-2}\sqrt[3]{b^2}\right)^3,$$

so könnte man sagen: man hat hier eine zweigliederige Größe zur dritten Potenz zu erheben; das erste Glied dieses Binomium ist positiv und stellt ein Produkt aus drei Faktoren (einem gemischten Bruche, einer Potenz und einer Wurzelgröße) vor, das zweite Glied ist negativ und besteht ebenfalls aus drei Faktoren (einem Decimalbruche, einer Potenz und einer Wurzelgröße). — Nach welcher Regel wird nun ein Binomium kubirt; wie wird ferner ein Produkt, wie ein gemischter Bruch, ein Decimalbruch, eine Potenz, eine Wurzelgröße kubirt und quadrirt und was hat man hiebei in Bezug auf die Vorzeichen der Glieder, namentlich hier des zweiten, zu bemerken? Wie werden gemeine Brüche mit Decimalbrüchen, wie ungleichnamige Wurzelgrößen unter sich multiplicirt? u. dgl.

Nun erst, nachdem so die Aufgabe aus ihrem Verstecke gleichsam hervorgezogen worden und man alle ihre Einzelnheiten klar erkannt und die einschlagenden Regeln in's Gedächtniß zurückgerufen hat, mache man sich an die eigentliche Behandlung und Auflösung.

Ein Verfahren der Art gibt Ueberblick, verschafft Einsicht, lehrt die Buchstaben als solche vergessen, erzwingt ein richtiges Lesen, erzeugt ein gewisses Selbstvertrauen, erweckt Lust zur Arbeit, erregt sogar ein Verlangen nach zusammengesetztern oder verwickeltern Aufgaben u. s. w.

V. Man arbeite nur langsam; denn gerade derjenige, welcher in der Mathematik langsam, d. h. bedächtig oder

nicht übereilt, zu Werke geht, wird — ja ist ein geschwinder Arbeiter, indem Flüchtigkeit und Uebereilung, womit gewöhnlich auch schlechtere Schrift verbunden ist, zehnmal zu einem unrichtigen Resultate führen, bis Bedächtigkeit einmal das richtige Ziel verfehlt.

Sollte man dennoch etwa durch ein Uebersehen, durch ein unrichtiges Auffassen, oder wie immer, die Auflösung einer Aufgabe nicht zu Stande gebracht haben, so sehe man höchstens einmal die gemachte Rechnung durch, und wird hiebei der Fehler nicht entdeckt, so schreite man, ohne auch nur einen Blick auf die alte Arbeit zu werfen, von Neuem und wo möglich zu einer andern Stunde an's Werk; auch kann man bisweilen eine andere Art der Auflösung oder doch einen andern Gang wählen; — der Erfolg wird dann günstiger sein.

I. Abschnitt.

Ueber ganze und gebrochene Zahlen.

§. 1. Ueber ganze Zahlen.

A. Addition und Subtraktion.

a. Fragen.

1. Was heißt eine Zahl zu einer andern addiren? — Wie nennt man die zu addirenden Zahlen, und wie heißt die denselben entsprechende Totalzahl?

2. Durch welches Zeichen werden diese Theilzahlen unter sich, und durch welches sodann mit der Totalzahl verbunden?

3. Mit welchem Namen bezeichnet man den so entstandenen mathematischen Satz, und mit welchem Grundsatze ist er gleichbedeutend?

4. Wie viele Theilzahlen geben je eine einfache Summe, und wie viele können zu einer zusammengesetzten gehören?

5. Wie wird jede Theilzahl durch die Summe und die andern Theilzahlen ausgedrückt? — Worin besteht sonach die Probe der Addition?

6. Was heißt eine Zahl von einer andern subtrahiren? — Wie nennt man eine jede von den beiden hier vorkommenden Theilzahlen, und wie heißt die denselben entsprechende Totalzahl?

7. Durch welches Zeichen werden die Theilzahlen unter sich und durch welches mit der Totalzahl verbunden?

8. Wie heißt nun der so entstandene mathematische Satz und mit welchem Grundsatze fällt er zusammen?

9. Wann wird die Differenz positiv, wann negativ?

10. Wann ist die Differenz einfach, wann zusammengesetzt?

11. Wie wird a) die eine und b) die andere von den beiden Theilzahlen mittelst der übrigen Zahlen ausgedrückt? — Worin besteht sonach die Probe der Subtraktion?

12. Welche wichtige Bedeutung haben die Klammern oder Haken?

13. Wann muß die eine (und welche?) von den beiden Theilzahlen bei der Subtraktion eingeklammert werden?

14. Was heißt Klammern, d. i. ein Klammerpaar, wegschaffen? — Wann müssen hiebei die eingeklammerten Theilzahlen ihre Qualitäten ändern?

15. Welche Ordnung kann man beim Wegschaffen der Klammerpaare befolgen, wenn mehrere a) neben- und b) ineinander vorhanden sind?

16. Wie viele Linksklammern müssen vorkommen, wenn n Rechtsklammern vorhanden sind? — Welche von ihnen bilden ein zusammengehöriges Paar?

17. Was nennt man in der Arithmetik Glieder? — Wann sind sie einfach und wann zusammengesetzt?

18. Was versteht man unter Monomium, was unter Bi-, Tri-, ... Polynomium?

Der Einfachheit wegen verstehen wir in der Folge unter Polynomium alle arithmetischen Ausdrücke, welche aus mehr als einem Gliede bestehen.

19. Aus wie vielen Gliedern besteht jede der unten folgenden Aufgaben a) vor und b) nach Wegschaffung sämmtlicher Klammerpaare?

20. In welcher doppelten Kalkuls-Verbindung können zwei mit dem Zeichen (—) verbundene Glieder genommen werden? — Wie ist diese abgekürzte Schreibart zu vervollständigen? Welche doppelte Bedeutung ergibt sich hieraus für die Zeichen + und —; welches ist nach der Vervollständigung das Operations- und welches das Qualitätszeichen?

21. Was heißt einen arithmetischen Ausdruck in einen andern verwandeln?

22. Wie verwandelt man eine Differenz in eine Summe, und umgekehrt eine Summe in eine Differenz?

23. Kann man bei der Subtraktion ebenso wie bei der Addition die beiden Theilzahlen auf ihren Stellen gegenseitig verwechseln?

24. Wie wird 1) zu der Summe 6 + 7 die Zahl 4,
2) zu der Zahl 5 die Summe 7 + 3,
3) zu der Summe 7 + 6 die Summe 5 + 4,
4) zu der Zahl 6 die Differenz 7 — 4,
5) zu der Differenz 6 — 5 die Zahl 4,
6) zu der Summe 7 + 6 die Differenz 5 — 4,
7) zu der Differenz 5 — 6 die Summe 7 + 4 und
8) zu der Differenz 7 — 4 die Differenz 5 — 6

durch Anwendung von Klammern addirt?

25. Wie wird 1) von der Summe 6 + 7 die Zahl 4,
2) von der Zahl 5 die Summe 7 + 6,
3) von der Summe 7 + 6 die Summe 4 + 5,
4) von der Zahl 6 die Differenz 7 — 4,
5) von der Differenz 7 — 4 die Zahl 6,

6) von der Summe $4+5$ die Differenz $6-7$,
7) von der Diff. $4-6$ die Summe $5+7$ und
8) von der Differenz $7-5$ die Differenz $4-6$
durch Anwendung von Klammern subtrahirt?

26. Welche Summen oder Differenzen erhält man, wenn die Nulle entweder zu einer Zahl, z. B. zu 6, addirt oder von ihr subtrahirt wird? Welcher Werth ergibt sich hieraus für die Nulle?

27. Gegen welche mathematischen Gesetze ist in den folgenden Beispielen:

1) $5-7=2$
2) $8+(3-2)+6=8-3+2+6$
3) $23-(2-3+4)=23-(2-7)$
4) $15-(4+2-1)=15-4+2-1$
5) $7-3+4-6=7-(3+4-6)$
6) $12-[3-(4-2)+6]=12-3-4+2-6$

gefehlt? — Wie müßte hier die linke Gleichungsseite jedesmal geschrieben sein, damit sie der rechten entspräche?

Hier, wie in allen nachfolgenden ähnlichen Beispielen soll die rechte Gleichungsseite unverändert gelassen, dagegen die linke so verbessert werden, daß dann die rechte Seite deren verbesserten linken wirklich gleich ist.

b. Aufgaben.

1) $28-(4-2+9)+[8-3-(4-5)+6]=29$.
2) $[44-(8-(2-5)+3)]-[20-(5-(7-1)-2)+3]=4$.
3) $1-[2-(2-(2-(2-3)-3)-3)+4]+8=2$.
4) $[12-(2-6)]-[3-(2-4)-(4-6)]=9$.
5) $13-[8-(5-7+6)-3]-[4-(2-8)-(20-3)]=19$.
6) $1-[2-(4-3-8)+6]-[10-(1-5)]-(4-3)+8=-21$.

B. Multiplikation und Division.

a. Fragen.

1. Was heißt eine Zahl durch eine andere multipliziren? Wie wird jede von diesen Zahlen benannt? Welche gemeinschaftliche Benennung haben beide zusammen? Wie heißt die durch sie erzeugte dritte Zahl?

2. Durch welches Zeichen werden die ersten beiden Zahlen unter sich und durch welches sodann mit jener dritten Zahl verbunden?

3. Mit welchem Namen bezeichnet man den durch diese drei Zahlen gebildeten arithmetischen Satz?

4. Wann gibt es Partialprodukte?

5. Wie läßt sich der eine Faktor durch das erhaltene Produkt und den andern Faktor ausdrücken? Worin besteht sonach die Probe der Multiplikation?

6. Was heißt eine Zahl durch eine andere dividiren? Wie heißt die eine, und wie die andere von diesen beiden Zahlen, und wie die aus ihnen hervorgehende dritte Zahl?

7. Durch welches Zeichen werden die ersten beiden Zahlen unter sich und durch welches sodann mit jener dritten Zahl verbunden?

8. Wie heißt der durch diese drei Zahlen so gebildete arithmetische Satz?

9. Wie läßt sich nach erhaltenem Quotienten der Dividend, und wie der Divisor ausdrücken; worin besteht sonach die Probe der Division?

10. Können die beiden Zahlen, welche die eine Gleichungsseite bilden, bei der Division ebenso wie bei der Multiplikation auf ihren Stellen gegenseitig verwechselt werden?

11. Wann muß die eine, und wann müssen die beiden sowohl bei der Multiplikation als auch bei der Division vorkommenden, die eine Gleichungsseite bildenden Zahlen eingeklammert werden?

12. Wie heißen in den unten ausgesetzten Aufgaben Multiplikand und Multiplikator, Dividend und Divisor?

13. Wie viele Glieder hat jede dieser Aufgaben, und wie heißen dieselben?

14. Was erhält man, wenn

1) die Zahl 60 durch die Summe $2+3$,
2) " " " " die Differenz $8-4$,
3) " " " " das Produkt 3×4,
4) " " " " den Quotienten $12 : 4$,
5) die Summe $4+8$ durch die Zahl 6,
6) " " " " die Summe $4+2$,
7) " " " " die Differenz $6-4$,
8) " " " " das Produkt 3×2,
9) " " " " den Quotienten $8 : 4$,
10) die Differenz $20-2$ durch die Zahl 6,
11) " " " " die Summe $4+2$,
12) " " " " die Differenz $6-4$,
13) " " " " das Produkt 2×3,
14) " " " " den Quotienten $6 : 2$,
15) das Produkt 8×12 durch die Zahl 2,
16) " " " " die Summe $3+1$,
17) " " " " die Differenz $5-2$,
18) " " " " das Produkt 2×2,
19) " " " " den Quotienten $8 : 2$,
20) der Quotient $12 : 4$ durch die Zahl 2,
21) " " " " die Summe $3+1$,
22) " " " " die Differenz $5-2$,
23) " " " " das Produkt 2×2,
24) " " " " den Quotienten $8 : 2$

a) multiplizirt und die Produkte sodann durch das entsprechende Zeichen verbunden werden, b) dividirt und die Quotienten sodann durch das entsprechende Zeichen verbunden werden?

15. Wann wird ein Produkt, und wann ein Quotient der Nulle gleich?

16. Gegen welche arithmetischen Gesetze ist in folgenden Beispielen:

1) $10-2\times3=8\times3$,
2) $(12+3)\times4+2=(12+3)\times6$,
3) $(7-4)\times8+3=7-32+3$,
4) $6\times(9-7)=54-7$,
5) $(7+3)\times(9-6)=63+27-6$,
6) $(18-4):7-3=18-4:4$,
7) $(24+20-8):4\times3=(6+5-2)\times3$,
8) $(8\times4)\times3=24\times12$,
9) $(84\times8):2=42\times4$,
10) $4:2\times5=2\times5$,
11) $24:(6:4)=4:4$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben sein, damit sie der rechten entspräche?

b. Aufgaben.

1) $6-8\times3+3-5\times2-8=-33$.
2) $(6-8)\times3+(3-5)\times(2-8)=6$.
3) $(6-8)\times3+3-5\times(2-8)=27$.
4) $(6-8)\times3+(3-5)\times2-8=-18$.
5) $(6-8)\times[3+(3-5)\times2-8]=18$.
6) $[(6-8)\times3+3-5]\times2-8=-24$.
7) $6-8\times[3+(3-5)\times(2-8)]=-114$.
8) $6-[8\times(3+(3-5)\times2)-8]=22$.
9) $6-[8\times(3+3)-5\times(2-8)]=-72$.
10) $[6-(8\times3+3-5)]\times(2-8)=96$.
11) $48-8:8-12-20:4+16=46$.

12) $(48-8):8-(12-20):4+16=23$.
13) $48-8:(8-12)-20:(4+16)=49$.
14) $(48-8):(8-12)-(20:4+16)=-31$.
15) $(48-8):(8-12)-20:(4+16)=-11$.
16) $[24:(36-4:(6-8)-30)+2]:5=1$.
17) $[((40-60):5+1):3-(2-11)]:2+2=6$.
18) $[(20-2):3-4\times(2-8)]:5-1=5$.
19) $100-[2-(4\times-3-(10-8:-4+(6-10)-2)-10)+4]=66$.
20) $[((60-80):4+9):2-(3-5)\times 7-4]:3=4$.
21) $(4-8\times-3):(16:2-1)+36-2:[3-2.(2-5)-14:2]=39$.
22) $12-2\times[8-(3\times 2+10:(1-3))-6:(3-(5\times 1-3))]=10$.
23) $1+28:[10-(2-34):(11-24:(12-2\times(3-1)))]=3$.
24) $[(10-2\times-3-(7-10:2)):7-3\times(4-12:(1-4)-1)+19]:6=0$.

§. 2. Ueber gemeine Brüche.

A. Addition und Subtraktion.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter dem Maße einer (ganzen) Zahl? Was unter dem gemeinsamen Maße mehrerer Zahlen? Mit welchem Namen (in Bezug auf die eine von den vier Rechnungsarten) kann man die Zahl und jedes Maß derselben belegen?

2. Welche Zahl ist zusammengesetzt, welche einfach? Wie heißt letztere noch? Welche Maße hat jene, und welche diese?

3. Was versteht man unter relativen Primzahlen? Kann

jede, nur eine oder darf keine von diesen Primzahlen zusammengesetzt sein?

4. Worin unterscheidet sich die Aufgabe „eine Zahl in ihre Faktoren zerlegen“ von der „alle Maße einer Zahl angeben“?

5. Woran erkennt man, daß 2, 3, 4, 5, 6, (7), 8, 9. 10, 11 und 12 Maße einer Zahl sind?

6. Was versteht man unter dem größten gemeinsamen Maße von zwei, oder von mehreren Zahlen? Wie findet man dasselbe im ersten und im zweiten Falle? Wann und wozu braucht man es?

7. Was versteht man unter dem kleinsten gemeinsamen Dividend von zwei oder mehreren Zahlen? Wie findet man denselben? Wann und wozu braucht man ihn?

8. Was versteht man unter gebrochenen Zahlen oder Brüchen überhaupt, und welche von den Brüchen nennt man gemeine oder künstliche?

9. Wie viele Zahlen bilden einen einfachen gemeinen Bruch, und wie wird jede genannt?

10. Mit welchem Zeichen werden diese Zahlen verbunden; welche Bedeutung hat sonach sowohl das Zeichen als der Bruch selbst?

11. In welcher Beziehung unterscheidet man ächte und unächte Brüche?

12. Wie viele und was für Einheiten niederer Art enthält der Bruch $^3/_4$, und allgemein jeder Bruch in Bezug auf die allen Brüchen gemeinsame Einheit höherer Art?

13. Sind $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{8}$ u. dgl. ganze oder gebrochene Zahlen?

14. Wovon hängt der Name, und wovon der Werth eines Bruches ab? Wann sind also Brüche gleichnamig, wann gleichwerthig? Welches ist der reciproke Werth eines Bruches?

15. Welcher von zwei Brüchen ist der werthvollere oder

größere, wenn sie a) nur gleiche Nenner, b) nur gleiche Zähler haben?

16. Auf welche doppelte Art kann der Werth eines Bruches vergrößert und insbesondere vervielfacht werden? Wann kann jede, wann nur die eine Art ausgeführt werden?

17. Auf welche doppelte Art kann der Werth eines Bruches verkleinert und insbesondere um ein Vielfaches vermindert werden? Wann kann jede Art, wann nur die eine ausgeführt werden?

18. Welche zwei Operationen müssen sonach in Anwendung kommen, und wie, damit am Werthe eines Bruches keine Aenderung geschieht?

19. Welche Aenderung erleidet der Werth eines Bruches, a) wenn der Nenner unverändert bleibt, der Zähler dagegen unaufhörlich entweder zu-, oder abnimmt; — b) wenn der Zähler unverändert bleibt, dagegen der Nenner unaufhörlich entweder zu- oder abnimmt?

20. Welcher von diesen Brüchen hat den größten und welcher den kleinsten Werth?

21. Wie verwandelt man eine ganze Zahl in einen Bruch mit beliebigem Nenner, sowie auch jeden Bruch in einen andern von anderer Benennung?

22. Was versteht man unter dem Reduciren eines Bruches? Wann hat der Bruch seine einfachste Benennung, d. i. den relativ kleinsten Nenner?

23. Wie werden ungleichnamige Brüche gleichnamig gemacht, und zwar a) ohne, b) mit relativ kleinstem Nenner?

24. Wie werden gleichnamige, wie ungleichnamige Brüche unter sich und zu ganzen Zahlen addirt?

25. Wie werden gleichnamige Brüche von einander, wie ungleichnamige von einander oder von ganzen Zahlen subtrahirt?

26. Was versteht man unter einer gemischten Zahl (einem gemischten Bruche); in welcher Kalkulsverbindung stehen hier die beiden Zahlen; dürfen bei ihrer abgekürzten Schreibart dieselben auf ihren Stellen gegenseitig verwechselt werden?

27. Wie verwandelt man die gemischte Zahl in eine gebrochene; wie einen unächten Bruch in einen gemischten? Welche Rechnungsart kommt dort, welche hier in Anwendung? Wann pflegt man die eine, wann die andere Verwandlung vorzunehmen?

28. Welche sonstigen Gesetze und Bemerkungen finden bei der Addition und Subtraktion der gemeinen Brüche dieselbe Anwendung, wie bei den ganzen Zahlen?

29. Wo ist in folgenden Beispielen:

1) $\frac{3}{5} \times 7 - \frac{6}{8} : 2 = \frac{21}{35} - \frac{3}{4}$

2) $5 \times \frac{2}{3} - \frac{6-3}{9} : 3 = \frac{17}{3} - \frac{6-1}{2}$

3) $\frac{3}{4} - \frac{6}{18} + \frac{7}{8} - \frac{4}{5} = \frac{3.2}{4.2} - \frac{6:2}{18:2} + \frac{7+2}{8+2} - \frac{4-2}{5-2}$

4) $1\frac{7}{9} + 2\frac{4}{9} = 3\frac{11}{18}$

5) $7\frac{5}{8} - 3\frac{3}{5} = 4\frac{2}{3}$

6) $3 + \frac{1}{3} - \left(8 - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3} - \frac{7}{4}$

7) $3\frac{1}{7} - \frac{3}{7} - \left(1\frac{5}{8} - 2\frac{3}{8}\right) = 3\frac{2}{7} - 1\frac{2}{8}$

8) $3 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{3} + \frac{11}{4}$

$$9)\ 2\frac{3}{4} - \left(4\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) = \frac{11-13}{12} - \frac{3}{5}$$

$$10)\ 7 - \frac{3-1}{7} = \frac{49-3-1}{7}$$

$$11)\ 7\frac{1}{12} - \frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 7\frac{1}{12} - \frac{8-15+2}{12}$$

gefehlt, und warum? Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben sein, damit sie in deren rechte Seite übergehen könnte?

b. Aufgaben.

$$1)\ 4 - \left(\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = 1.$$

$$2)\ 1\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \left(2\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{6}\right) = 2.$$

$$3)\ 1\frac{3}{8} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{6} - 2\frac{1}{8}\right) = 3.$$

$$4)\ 3\frac{5}{8} - \left(1\frac{1}{5} - \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{3} - 2\right) - 1\frac{3}{10}\right) + 1\frac{1}{15} = 4.$$

$$5)\ 3 - \left(1\frac{1}{4} - \left(3\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{1}{3} - 2\right) - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8}\right) - \frac{5}{12}\right) + 1\frac{1}{3} = 5.$$

$$6)\ 14\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right) + \frac{5}{6}\right) - \left(2 - \left(1 - 3\frac{1}{4}\right)\right) - \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = 6.$$

B. Multiplikation und Division.

a. Fragen.

1. Wie wird eine ganze Zahl durch einen Bruch oder durch einen Quotienten, und umgekehrt, multiplicirt?

2. Wie wird ein Bruch oder ein Quotient durch einen Bruch multiplicirt? Müssen ungleichnamige Brüche zuvor gleichnamig gemacht werden? Dürfen sie es?

3. Wie wird ein gemischter Bruch a) durch eine ganze Zahl und umgekehrt, b) durch einen gemeinen Bruch und umgekehrt und c) durch einen andern gemischten Bruch multiplicirt?

4. Wie wird hier ein mehrgliedriger Faktor a) durch einen eingliedrigen und b) durch einen mehrgliedrigen auf doppelte Art multiplicirt?

5. Wie werden drei oder mehrere Brüche durcheinander multiplicirt?

6. Dürfen zwischen dem Zähler eines Bruches und dem Nenner irgend eines andern Bruches schon vor dem wirklichen Multipliciren Reduktionen vorgenommen werden?

7. Welche Aenderung erleidet der Bruchwerth des einen und des andern Faktors, wenn die beiden Zähler; welche dann, wenn die beiden Nenner durcheinander multiplicirt werden?

8. Wann ist das Produkt a) kleiner, b) größer als jeder Faktor, c) größer als der eine und kleiner als der andere Faktor?

9. Wie wird eine ganze Zahl durch einen Bruch oder durch einen Quotienten, und umgekehrt, dividirt?

10. Wie oft ist eine ganze Zahl, wie oft ein Bruch a) in der Einheit (1) und b) in sich selbst enthalten?

11. Wie wird ein Bruch oder ein Quotient durch einen

Bruch dividirt? Müssen ungleichnamige Brüche zuvor gleichnamig gemacht werden?

12. Wie wird ein gemischter Bruch a) durch eine ganze Zahl und umgekehrt, b) durch einen gemeinen Bruch und umgekehrt und c) durch einen andern gemischten Bruch dividirt?

13. Wie wird hier ein Polynomium a) durch ein Monomium und b) durch ein Polynomium dividirt?

14. Welche Aenderung erleidet der Bruchwerth des Dividends, wenn die beiden Zähler, und welche dann, wenn die beiden Nenner durcheinander gehörig dividirt werden?

15. Wann muß der Quotient kleiner, wann größer und wann ebenso groß als der Dividend sein?

16. Wie verwandelt man ein Produkt in einen Quotienten, und umgekehrt?

17. Welche frühern Gesetze und Bemerkungen finden beim Multipliciren und Dividiren der Brüche dieselbe Anwendung, wie bei ganzen Zahlen?

18. Wo ist in den folgenden Beispielen:

1) $\frac{15 \times 27}{9} + \frac{12:9}{21} = \frac{5 \times 9}{3} + \frac{4:3}{7}$

2) $\frac{35:6}{25} - \frac{36:15}{25} = \frac{7:6}{5} - \frac{36:3}{5}$

3) $\frac{32}{4:8} + \frac{20}{15:9} - \frac{21}{18:14} = \frac{8}{1:2} + \frac{4}{3:9} - \frac{3}{18:2}$

4) $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{14}{40} - \frac{3}{8}$

5) $\frac{4}{9} : 7 + 3\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{4} \times 7 + 3\frac{6}{40}$

6) $1\frac{1}{6} : \frac{1}{2} - 2\frac{4}{15} : \frac{2}{3} = 1\frac{2}{6} - 2\frac{2}{5}$

7) $6\frac{1}{2}:2\frac{3}{5}=3\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}$

8) $1\frac{3}{4}:\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)=1\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)$

9) $1:\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=1:\frac{9-8}{12}+\frac{9:8}{12}$

10) $\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right):\frac{2}{7}-\frac{8}{9}:\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{7}\right)=\frac{28}{10}-\frac{21}{8}-\frac{40}{27}-\frac{56}{36}$

11) $\frac{2}{9}\times\frac{3}{8}:\frac{1}{2}-\frac{1}{2}:\frac{2}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{4}{9}\times\frac{6}{8}-\frac{9}{4}\times\frac{3}{8}$

12) $\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}-\frac{7}{8}\times\left(\frac{3}{5}-\frac{6}{7}\right)=\frac{3}{4}:\frac{9}{4}-\frac{7}{8}:\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{6}\right)$

13) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}-7\frac{3}{5}\times1\frac{1}{2}=\frac{5}{4}:\frac{3}{2}-1\frac{1}{2}:7\frac{5}{3}$

gefehlt, und warum? Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $\frac{20}{3}\times\left(2\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\right)\times-\left(1\frac{1}{3}-2\frac{5}{6}\right)=17.$

2) $\left(30-1\frac{1}{4}-2\frac{1}{8}-1\frac{5}{12}+3\frac{7}{24}\right)\times48=1368.$

3) $\left(2\frac{2}{3}-1\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{5}+2\frac{1}{8}.\frac{5}{21}-\left(10\frac{1}{2}-12\frac{3}{4}\right).\frac{6}{7}+13\frac{2}{7}.\frac{1}{40}$
$=3.$

4) $(1-9)\times\left(2-1\frac{2}{3}\times1\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{8}\right)$
$=\frac{1}{2}.$

5) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-(2\frac{3}{4}-5)\right)\times\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\right)\times3\frac{9}{13}+6\frac{7}{24}$
$=4.$

6) $\left(\left(\left(1\frac{1}{3}-2\right)\times1\frac{1}{2}-2\right)\times1\frac{1}{5}+2\right)\times\left(\frac{1}{2}-3\right)+6$
$=10.$

7) $\left(3\frac{2}{3}-4:\frac{1}{2}-\left(2\frac{1}{4}-3\frac{1}{3}-5\right)+8\frac{7}{12}\right):1\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=7.$

8) $\left(1\frac{2}{5}-\left(2-4\frac{1}{2}\right):\left(\frac{2}{3}-2\right)+\frac{3}{10}\right):\left(1\frac{3}{8}-2\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{5}.$

9) $\left(\left(2\frac{1}{2}:4+\frac{1}{2}\right):1\frac{1}{8}+4:1\frac{1}{3}-\frac{2}{5}:3\right):\frac{2}{3}+\frac{1}{5}:\left(\frac{3}{4}-1\right)$
$=5.$

10) $\left(\left(\left(1\frac{1}{2}-3\right):2\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right):1\frac{2}{5}-1\frac{2}{7}\right):\left(1\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{7}$
$=2.$

11) $\left(\left(4\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}\right):\left(4-\left(2-\frac{1}{3}\right)\right)\right):\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{4}\right)+\frac{12}{25}$
$=2.$

12) $\left(\left(3\frac{1}{2}-2:\left(4-2\frac{1}{3}\right)+2\frac{1}{3}\right):\frac{1}{10}-6\frac{1}{3}\right):2-2=18.$

13) $\left(\frac{1}{8}-5\frac{1}{2}+2\right):-\left(1\frac{2}{3}-\frac{5}{8}-2\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{41}=-2.$

14) $\left(\left(4-5\frac{1}{8}\right):2+1\frac{3}{4}-\left(2\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)\right):\frac{1}{48}$ $=67.$

15) $\left(1-5\frac{2}{3}\right):\left(4\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}\times\left(1\frac{1}{2}-3\right)\right)=8.$

16) $\left(2\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right):-\left(2-1\frac{1}{3}+6\times\left(4-5\frac{1}{3}\right)\right)-\left(4:2\frac{1}{2}\right.$ $\left.+5\frac{1}{3}:\left(2-3\frac{1}{4}\right)-\left(1-\frac{4}{3}\right):5\right)=3.$

17) $53\times\left(\frac{1}{2}+1\frac{5}{6}\right):\left(4-2\frac{1}{4}:1\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-2\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}:2\right)$ $=28.$

18) $\left(2\frac{1}{2}\times\left(1\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}\right)-4\frac{1}{5}\times\left(\frac{2}{7}-1\right)+3\times\left(1\frac{1}{3}\right.\right.$ $\left.\left.-2\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}:4\right):\frac{1}{2-8}=6.$

19) $2:1\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}:3-\frac{1}{2}:\left(1-1\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{4}:3-\left(2\frac{1}{2}-3\right)$ $\times\left(3-2\frac{1}{2}\right)-\left(1-3\frac{2}{3}\right):5=4.$

20) $\left(2\frac{1}{2}\times-\left(3\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)-1\frac{5}{8}:\left(2\frac{1}{8}-1\frac{4}{5}\right)+9:\left(4-3\frac{1}{10}\right)\right)$ $:\left(1:\frac{5}{13}-6\right)=\frac{5}{8}.$

21) $\left(1:1\frac{7}{26}\right)\times\left(1\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}+4:1\frac{2}{3}-5\right):\left(1\frac{1}{5}-2\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right.$ $\left.+1\frac{2}{3}\times\left(2-\frac{3}{2}\right):\left(\frac{1}{6}-1\right)-2\right)=\frac{7}{8}.$

22) $\left(\left(2\frac{1}{3}-5\right):\left(5-2\frac{1}{3}\right)-\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}-1\frac{1}{6}\right)\right)$
$:-\frac{2}{3}\times\left(1\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\right)=\frac{5}{7}.$

23) $3\frac{1}{2}-2:3+\frac{1}{4}:\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}:2-\left(\frac{2}{5}-1\frac{1}{3}\right):\frac{1}{60}=60.$

24) $\left(\left(\left(\left(3\frac{1}{2}-2\right):3+\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}\right):2-\left(\frac{2}{5}-1\frac{1}{3}\right)\right)$
$:\frac{1}{60}=141.$

§. 3. Ueber Bruchbrüche.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter einem Bruchbruche? Wie vielerlei Arten kann man unterscheiden?

2. Wie verwandelt man einen Bruchbruch, a) wenn Zähler und Nenner monomisch, b) wenn nur der eine von beiden und c) wenn beide bi= oder polynomisch sind, in den entsprechenden gemeinen Bruch?

3. Auf welche Weise werden Bruchbrüche reducirt?

4. Worin besteht das Verfahren, Bruchbrüche zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren und zu dividiren?

5. Wie müßten die unten folgenden Aufgaben geschrieben werden, um jeden Bruchbruch zu vermeiden?

6. Welche frühern Regeln finden auch hier Anwendung?

7. Wo und warum ist in den folgenden Beispielen:

$$1)\quad \frac{3}{\frac{5}{8}}+\frac{\frac{3}{4}}{7}+\frac{2}{\frac{4}{5}}=\frac{\frac{3}{5}}{8}+\frac{3}{28}+\frac{2}{20}$$

$$2)\quad \frac{\frac{7}{8}}{21}+\frac{1\frac{3}{4}}{15}-\frac{6}{\frac{3}{5}}-\frac{10}{4\frac{5}{7}}=\frac{\frac{1}{8}}{3}+\frac{1\frac{1}{4}}{5}-\frac{2}{\frac{1}{5}}-\frac{2}{4\frac{1}{7}}$$

3) $\frac{1\frac{1}{3}}{4} - \frac{3\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}}{5+6\frac{1}{4}} + \frac{2\frac{1}{2}-3}{6+3\frac{1}{8}} = \frac{4}{12} - \frac{3\frac{1}{2}}{5} + \frac{2\frac{1}{3}}{6\frac{1}{4}} + \frac{5-3\cdot 8}{6\cdot 2+25}$

4) $\frac{2\frac{1}{5}+3\frac{1}{6}}{1\frac{1}{3}\times 2\frac{1}{2}} - \frac{(1\frac{1}{4}-2)\cdot 1\frac{5}{6}}{4\cdot(\frac{1}{8}+\frac{3}{4})} = \frac{11\cdot 6+19\cdot 5}{4\cdot 10\times 5\cdot 15} - \frac{(5\cdot 6-2)\times 11\cdot 4}{4\cdot(8+3\cdot 6)}$

5) $1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{5}:(7\frac{1}{2}-\frac{3}{4}) - \frac{2\frac{1}{4}-1\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}+2\frac{1}{3}} = \frac{1\frac{1}{3}+2\frac{1}{5}}{7\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} - 2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}:(3\frac{1}{4}+2\frac{1}{3})$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben sein, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

A. Addition und Subtraktion.

1) $\frac{2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{4}} = 2.$

2) $\frac{2}{1\frac{2}{5}} + \frac{1\frac{3}{5}}{\frac{5}{8}} - \frac{4}{1\frac{1}{5}} - \frac{1}{18\frac{3}{29}} = \frac{3}{5}.$

3) $\frac{3-4\frac{1}{2}}{5} + \frac{2\frac{1}{3}-6}{7} + \frac{12\frac{1}{2}+7\frac{1}{5}}{1\frac{1}{4}} - \frac{983}{1050} = 14.$

4) $\frac{3\frac{1}{2}}{2} + \frac{3}{1\frac{1}{8}} - \frac{2\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}} + \frac{2-1\frac{1}{2}}{3} + \frac{\frac{1}{3}-1\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}} = 3.$

5) $\frac{2\frac{2}{3}-1\frac{1}{2}}{5} + \frac{2\frac{1}{8}}{4\frac{1}{5}} - \frac{10\frac{1}{2}-12\frac{3}{4}}{1\frac{1}{6}} + \frac{13\frac{2}{7}}{40} = 3.$

6) $\frac{2\frac{1}{3}}{4} - \left(\frac{1}{2\frac{1}{2}} - \frac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} + \frac{2\frac{1}{3}}{1\frac{1}{4}} + \frac{1\frac{1}{2}+\frac{5}{8}}{2\frac{3}{4}+1}\right) = 3.$

7) $\frac{4:2\frac{1}{2}}{3} - \left(1 - \frac{2\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2}} + \frac{4}{5:1\frac{2}{3}}\right) + \frac{2\frac{1}{4}+2\frac{1}{5}:4}{2\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 1.$

$$8)\quad \frac{4\tfrac{1}{2}-1}{(1:1\tfrac{1}{2})\times(1-\tfrac{1}{4})}-\frac{2\times(8-1\tfrac{1}{3})}{(4\tfrac{1}{2}-2\tfrac{1}{2}:5):\tfrac{3}{2}}=2.$$

$$9)\quad \frac{2:\tfrac{1}{3}}{1-(\tfrac{1}{2}-1):\tfrac{1}{2}}-\frac{1-3\tfrac{1}{2}}{1\tfrac{1}{2}:2-\tfrac{1}{4}}+\frac{1-4}{\tfrac{3}{4}-1\tfrac{1}{2}}+\frac{2\times2\tfrac{1}{2}:4}{\tfrac{1}{2}:1\tfrac{3}{5}-1\tfrac{1}{4}:2}=8.$$

$$10)\quad \frac{(2+1\tfrac{3}{4}:7)\times1\tfrac{2}{3}:\dfrac{\tfrac{1}{3}}{4}}{(4\tfrac{1}{2}-1\tfrac{3}{5})\times2\tfrac{1}{2}-1\tfrac{2}{3}}-\frac{1\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}}{10\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}}=8.$$

$$11)\quad \frac{(\tfrac{1}{3}-1)\times2\tfrac{2}{3}}{[1:(\tfrac{3}{4}:2)]\times(1-\tfrac{2}{3})}+\frac{8-2:\tfrac{1}{4}}{4:(1-5)}+\frac{(3\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2})\times(1-2\tfrac{1}{4})}{\tfrac{3}{4}-2}$$
$$-\frac{2-6}{\tfrac{1}{2}-3:\tfrac{2}{3}}=0.$$

B. Multiplikation und Division.

$$1)\quad \left(\frac{8\tfrac{1}{4}-7\tfrac{3}{5}}{4-3\tfrac{1}{2}}-\frac{8\tfrac{1}{10}}{2:1\tfrac{1}{4}}\right)\times-\frac{4}{30\tfrac{1}{10}}=\tfrac{1}{2}.$$

$$2)\quad \frac{2\tfrac{1}{2}-3:1\tfrac{5}{4}+\tfrac{5}{6}}{(\tfrac{2}{3}-2:1\tfrac{1}{2})\times4+3\tfrac{1}{2}}\times\left(\frac{1\tfrac{1}{3}-1:3}{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}}-\frac{\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}}{\tfrac{2}{3}-1}\right)=12.$$

$$3)\quad \left(\frac{3\tfrac{1}{8}-1\tfrac{1}{8}}{2}-\frac{(1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}):1\tfrac{5}{7}}{1\tfrac{2}{3}}\right):1\frac{43}{60}=\tfrac{1}{4}.$$

$$4)\quad \left(\frac{3\tfrac{1}{2}-1\tfrac{1}{4}}{2\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}}:\frac{4\times(2\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})}{1\tfrac{2}{3}+2\tfrac{1}{2}}\right)\times\frac{2\tfrac{3}{5}\times5\tfrac{1}{8}}{3\tfrac{1}{8}:4}=9.$$

$$5)\quad \frac{[(8\tfrac{1}{2}:2\tfrac{1}{3}-4):2\tfrac{1}{2}+4]\times1\tfrac{1}{2}-4:1\tfrac{2}{3}}{[(1\tfrac{1}{4}-2\tfrac{1}{2}):(3-1:2\tfrac{1}{4})]\times(3\tfrac{1}{2}-2\tfrac{4}{5})+1\tfrac{1}{8}}:\frac{\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{24}:5}{3\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}}=23.$$

$$6)\quad \left(\frac{2\tfrac{1}{3}-4\tfrac{1}{6}}{5\tfrac{1}{2}\times1\tfrac{1}{11}}-\frac{4:2\tfrac{1}{2}-3}{[1\tfrac{1}{2}:(2\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2})]\times\tfrac{6}{5}}+\frac{1:2\tfrac{1}{2}-3}{(5-7\tfrac{1}{2})\times3\tfrac{1}{5}:5}\right.$$
$$\left.:\left(\frac{1-\tfrac{1}{3}}{\tfrac{5}{12}-\tfrac{1}{4}:3}-\frac{(1+\tfrac{1}{4}):5}{\tfrac{9}{10}-1}\right)\right)\times\left(\frac{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}}{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}}-\frac{\tfrac{1}{4}+1\tfrac{1}{2}}{1-1\tfrac{1}{4}}\right)=17.$$

$$7)\ \left(\frac{8:2\frac{1}{2}}{(\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}):5\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}:2}{1\frac{1}{4}-\frac{3}{2}}-\frac{2:3}{1-2\frac{1}{2}}\right):\frac{(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}):\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-5}=211.$$

$$8)\ \left(\frac{1\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}\times(2-1\frac{1}{4})}-\frac{8:1\frac{1}{3}}{(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}):\frac{1}{4}}+\frac{2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}}\right):\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{3\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}=103.$$

$$9)\ \left(\frac{2\times(1\frac{1}{4}-3:1\frac{2}{5})-4}{1\frac{3}{5}:4-2\times(1-3\frac{1}{2})}:\frac{2\frac{1}{8}-(4-3\frac{1}{6}:2)}{(1\frac{1}{2}:6)\times[1\frac{1}{2}:-(4-3\frac{2}{3})]}\times 6\right)$$
$$\times\frac{\frac{1}{3}-\frac{67}{5}}{1\frac{2}{3}+\frac{2}{5}:3}=5.$$

$$10)\ 4\frac{1}{2}:\left(\frac{\frac{1}{12}+2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}:6}{6-\frac{1}{2}}:\left(\frac{1\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}\times(1\frac{2}{3}-1\frac{1}{4})\times(2-3\frac{1}{5})}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times(2\frac{1}{6}-3)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1\frac{1}{2}-(4:1\frac{1}{3}):1\frac{1}{5}}{2\times(1\frac{1}{3}:2)\times(3:1\frac{1}{3})}\right)\right)+\frac{1}{4}=20.$$

§. 4. Ueber Decimalbrüche.

A. Addition und Subtraktion.

a. Fragen.

1. Welche von den gemeinen oder künstlichen Brüchen nennt man Decimal= oder natürliche Brüche? Warum kann man deren Nenner beim Anschreiben weglassen? Durch welches Zeichen wird diese Abkürzung angezeigt?

2. Was versteht man unter den Ganzen, und was unter den Decimalziffern oder Decimalstellen? Welchen Nenner hat die erste, die zweite, die dritte, . . . die sechste Ziffer oder Stelle für sich, und welchen haben die ersten zwei, die ersten drei, . . . die ersten sechs Ziffern oder Stellen zusammen?

3. Auf welche doppelte Art kann sonach jeder Decimalbruch ausgesprochen werden?

4. Wie vielerlei Einheiten niederer Art enthält der Decimalbruch 3,70286, und wie viele von jeder Art?

5. In welcher Rechnungsverbindung stehen sowohl die Ziffern vor und nach dem Decimalstrich, als auch die einzelnen Ziffern unter sich?

6. Wie wird demnach ein Decimalbruch ohne Beibehaltung des Decimalstrichs in eine Summe verwandelt?

7. Wann entspricht ein Decimalbruch einem gemeinen ächten, und wann einem unächten oder gemischten Bruche?

8. Welche Aenderung erleidet der Bruchwerth, wenn der Decimalstrich um ein, zwei, drei, . . . um m Ziffern a) nach der linken und b) nach der rechten Hand versetzt wird? Wie wird also ein Decimalbruch durch 10, 100, 1000 . . . a) multiplicirt und b) dividirt?

9. Welche Aenderung erleidet der Nenner eines Decimalbruches, wenn an die Decimalziffern eine, zwei, drei . . . Nullen angehängt werden? Verändert sich in gleichem Maße der Bruchwerth selbst?

10. Wie verwandelt man jede ganze Zahl in einen Decimalbruch mit beliebig viel Decimalstellen?

11. Wann sind Decimalbrüche gleichnamig, wann ungleichnamig? Wie werden letztere gleichnamig gemacht?

12. Welcher Nenner dient bei mehreren ungleichnamigen Decimalbrüchen als kleinster gemeinsamer Dividend?

13. Wie heißen die Maße der Zahlen 10, 100, 1000 . . .? Womit muß ein jedes von diesen Maßen multiplicirt werden, damit das Produkt wieder 10, 100, 1000 . . . gibt?

14. Welche von den gemeinen Brüchen lassen sich in vollkommen gleichwerthige Decimalbrüche verwandeln?

15. Welche von den gemeinen Brüchen können auf diese Weise nie in vollkommen gleichwerthige Decimalbrüche verwandelt werden?

16. Was versteht man unter endlichen, was unter unend-

lichen Decimalbrüchen? Wann heißen die letztern rein, wann unreinperiodisch?

17. Welche Decimalziffern bilden zusammen die Periode? Wie heißen diejenigen Ziffern, welche nicht zur Periode des Bruches gehören?

18. Gehört bei dem Decimalbruche 0,27272 . . . die erste Ziffer zur Periode, oder nicht? Heißt ferner bei dem Bruche 0,045045 . . . . die Periode 045, oder 450 oder gar 504? Ist es vielleicht in solchen zweifelhaften Fällen erlaubt, den Bruch sowohl für rein= als auch für unreinperiodisch zu nehmen?

19. Wovon hängt es ab, wie viele Decimalziffern bei unreinperiodischen Brüchen in Rechnung genommen werden müssen? Wann soll die letzte von den in Rechnung genommenen Ziffern um eine gleichartige Einheit erhöht werden?

20. Ist dieses Erhöhen mathematisch richtig? Wie viel beträgt der Fehler, wenn von den Brüchen: 2,31481; 1,24163; 0,38074; 3,11985 und 4,99992 a) die fünfte Decimalziffer α) ohne und β) mit angebrachter Erhöhung und b) die vierte Decimalziffer sammt der fünften α) ohne und β) mit angebrachter Erhöhung weggelassen wird? Wie sollen also diese verkürzten Brüche heißen?

21. Wie läßt sich vor der Verwandlung des künstlichen Bruches in den entsprechenden Decimalbruch erkennen, ob dieser endlich oder unendlich, und ob letzterer sodann rein= oder unreinperiodisch sein wird?

22. Wie läßt sich ferner bei endlichen Brüchen die Anzahl der Decimalstellen, und bei unendlichen die Anzahl der außerperiodischen Ziffern genau bestimmen? Wie viele Ziffern kann bei den letztern jedesmal die Periode höchstens haben?

23. Wie verwandelt man umgekehrt a) jeden endlichen und b) jeden unendlichen Decimalbruch, man möge dessen Periode vollkommen oder nur unvollkommen kennen, in den entsprechenden gemeinen Bruch?

24. Welcher von den folgenden gemeinen Brüchen: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{12}{11}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{29}{13}$, $\frac{47}{14}$, $\frac{61}{15}$, $\frac{99}{16}$, $1\frac{16}{17}$, $2\frac{17}{18}$, $3\frac{18}{19}$ und $4\frac{19}{20}$ geht bei der Verwandlung in einen endlichen Decimalbruch (mit wie viel Ziffern?), welcher in einen rein=, und welcher in einen unreinperiodischen (mit wie viel außerperiodischen Ziffern?) über? Wie heißen diese verwandelten Brüche?

25. Welche von den folgenden Decimalbrüchen:

1) 0,1; 0,111...; 0,0111...; 0,00111...
2) 0,2; 0,222...; 0,0222...; 0,00222...; 0,000222...
3) 0,3; 0,333...; 0,00333...; 0,00000333....
4) 0,5; 0,55; 0,555...; 0,6; 0,66; 1,666....
5) 1,24; 1,2424...; 1,24242...; 1,2444...
6) 1,024; 1,024024...; 1,0240240...; 1,02402402...
7) 0,045; 0,045045...; 0,0450450...; 0,04504504...; 0,04555...
8) 0,72; 0,7272...; 0,72727...; 0,7222...
9) 0,027; 0,027027...; 0,0270270...; 3,02702702....
10) 0,0027; 0,00270027...; 0,002700270...; 0,0027002700...; 0,0027002...; 0,002777....
11) 2,452; 3,65625; 5,035; 1,625; 2,00625.
12) 3,02439; 3,0243902439...; 3,02439024390...; 3,024390243902...; 3,0243902439024...; 3,02439024390243...; 3,0243999...; 3,0243939...; 3,02439439....
13) 0,142857142857...; 1,428571428571...; 14,285714285714...; 142,857142857142...; 1428,571428571428...; 14285,714285714285...; 0,0142857142857...; 0,00142857142857....

14) 0,03571428571428....; 0,3571428571428....
15) 2,0136986301369863...; 20,1369863013698630....
16) 9,00487804878...; 900,487804878....
17) 0,0769230769...; 0,769230769....
18) 8,0188679245283018 8....; 8,00188679245283018 8....

sind endlich, welche rein=, und welche unreinperiodisch? — Wie heißt bei den unendlichen die Periode? — Wie heißen die entsprechenden gemeinen Brüche?

26. Welche Decimalziffern sind gleichartig? — Wie müssen Decimalbrüche unter einander geschrieben werden, damit alle gleichartigen Ziffern unter einander zu stehen kommen?

27. Wie wird zu einem Decimalbruche ein anderer Decimalbruch oder auch eine ganze Zahl addirt?

28. Wie wird ein Decimalbruch von einem andern Decimalbruche, oder von einer ganzen Zahl, und umgekehrt diese von jenem subtrahirt?

29. Wodurch unterscheiden sich diese Rechnungsarten von jenen mit lauter ganzen Zahlen?

30. Welche frühern Regeln kommen hier ebenfalls in Anwendung?

31. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $3{,}18+0{,}8-3{,}28-2+(-7{,}24-1{,}02)=3{,}26-3{,}26-6{,}22$,
2) $7+2{,}85-(7-2{,}85)=9{,}85-5{,}85$,
3) $932-6{,}5-(0{,}88+0{,}46)=86{,}7-0{,}134$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

32. Was versteht man unter einem Duodecimalbruche? Welchen Namen oder Lokalwerth hat hier, wenn der Duodecimalbruch nach Art des Decimalbruches ohne Nenner, aber mit Hilfe des Duodecimalstriches geschrieben wird, a) die erste und b) die zweite unmittelbar vor und nach dem Striche befindliche Ziffer? — Welche Aenderung erleidet der Bruchwerth,

wenn der Duodecimalstrich um eine, zwei oder um drei Stellen sowohl nach der linken als auch nach der rechten Hand fortgerückt wird?

b. Aufgaben.

1) 2,8 + 0,812 + 0,28 + 0,028 + 2,08 = 6.
2) 0,5 + 1,02 + 0,08 + 5,4 + 5 = 12.
3) 6,913 — (2,85 — 0,937) = 5.
4) 24 — 2,4 — (3,008 — 5) — 3,092 = 20,5.
5) 10 — [1,25 — (2,5 — (0,625 — 2) + 0,4) — 2,02] — 0,045 = 15.
6) 8 — [2,06 — (0,2 — 2) — 0,008] + 4,008 — (0,06 — 2,004) = 10,1.

B. Multiplikation und Division.

a. Fragen.

1. Wie wird ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl oder durch einen andern Decimalbruch, und umgekehrt, multiplicirt?

2. Worin stimmt dieses Verfahren mit dem bei ganzen Zahlen und dem bei gemeinen Brüchen überein?

3. Kommen die weggelassenen Nenner auch mit in Rechnung? Wodurch? — Um wie viele Decimalstellen hat das Produkt mehr als der Multiplikand, oder als der Multiplikator?

4. Wie viele Decimalstellen erhält, wenn der Bruch 1,234 durch den Bruch 0,567 multiplicirt wird, das erste Partialprodukt, wenn mit der Ziffer 5, und wie viele dann, wenn mit der Ziffer 7 zu multipliciren begonnen wird?

5. Wie wird ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl, und umgekehrt, und wie durch einen Decimalbruch dividirt? Worin stimmt dieses Verfahren mit dem, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt wird, überein?

6. Werden die weggelassenen Nenner hiebei auch in Rechnung gebracht? Wodurch? — Wie viele Decimalstellen hat der Quotient, wenn der Dividend durch den Divisor a) ohne, b) mit einem Reste, nachdem dieser in einen Decimalbruch verwandelt worden, getheilt worden ist?

7. Welche frühern Regeln kommen hier ebenfalls in Anwendung?

8. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $0,2 \times 4 + 0,4 \times 3 = 0,8 + 0,12$,

2) $0,9 \times 0,5 + 0,3 \times 0,2 = 0,45 + 0,6$,

3) $0,16 \times 10 - 4,45 \times 0,10 = 1,6 - 44,5$,

4) $5,6 : 7 + 0,21 : 7 + 0,8 : 0,4 = 0,8 + 0,3 + 0,2$,

5) $36 : 0,9 + 0,036 : 0,09 - 0,0025 : 100 = 0,4 + 0,04 - 0,25$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben sein, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $0,139 \times 28 + 42 \times 0,002 + 6 \times 0,004 - 0,05 \times 20 = 3$.

2) $63,42 \times 10 - (0,5 \times 2,6 + 5,809 \times 100 + 0,002 \times 2,4 + 0,0095952 \times 1000) = 42,4$.

3) $[((1,03 - 2) \times 1,2 - 3) \times 2,5 + 1,5] \times (0,02 - 4) - 29,402 \times 0,9 = 9$.

4) $2 \times [(0,69 - 0,25) \times (2 - (0,75 - 1,5)) \times 2,04 - 0,46] - 0,008 \times 2,1 = 4$.

5) $(10 - 1,25) \times 0,2 + 0,02 \times 2,8 - (5,3 - 80,3 \times 0,1) \times 10 - 805,3 \times 0,02 = 13$.

6) $3,7 \times (1 - 0,8) \times 0,4 + (2,4 - 3,04) \times (1 - 2,2) - 0,8 \times [(3 - 2,4) \times 0,2 - 4 \times 0,01] = 1$.

7) $2,4 : 0,8 - (2,4 : 0,08 - 0,24 : 0,8 - 0,024 : 0,8 + 2,4 : 8 - 24 : 0,8) \times 100 = 6$.

8) $2:0{,}1-(0{,}8:10-0{,}2:0{,}02)+36{,}48:8-(2-4:0{,}05 + 0{,}6:1{,}25)=112.$

9) $4{,}5:(2-3{,}5)-(0{,}08-1):(0{,}2:0{,}05)+(2{,}5-4):100 + 135{,}7:20=4.$

10) $[((4{,}04-0{,}2:8):0{,}4-2):0{,}01-3{,}75]:3{,}2=250.$

11) $72{,}2:10-2:[0{,}5:(1{,}5-0{,}02)]+2{,}125:(1{,}75-0{,}5)=3.$

12) $0{,}2+[1{,}4-(2-4{,}5):(0{,}12:0{,}1-3{,}7)+0{,}7]:(1{,}375:2{,}25) = 2.$

13) $[(2{,}4:0{,}02-10)\times 0{,}08-2:0{,}2+0{,}2\times 1{,}05]:(1{,}09-1{,}1) = 99.$

14) $(0{,}8-2:0{,}04)\times(6{,}4:8-8:6{,}4)-(0{,}4:10+0{,}21\times 10) = 20.$

15) $[(0{,}6-2{,}08):2{,}5+3\times 0{,}0167:0{,}05]:(1-95{,}9:100) -(50:2{,}5-2{,}5\times 1{,}6)=-6.$

16) $[((2{,}8-(0{,}04-2{,}2):8-0{,}2):0{,}8+8):0{,}08]\times 0{,}64-2{,}7 = 90.$

17) $[-2{,}3\times(0{,}4-2{,}15)-2{,}08\times(0{,}015-2{,}8)+9:0{,}9]:0{,}02 + 9{,}11=1000.$

18) $[(((0{,}8-4):0{,}16+4):1{,}6-12\times 0{,}5):16+1]\times 16+16 = 16.$

§. 5. Ueber verkürzte Multiplikation und Division.

a. Fragen.

1. Wann darf bei Decimalbrüchen die verkürzte Art zu multipliciren und zu dividiren angewendet werden?

2. Worin besteht das Verfahren in beiden Fällen? — Warum heißt dasselbe ein verkürztes?

3. Um wie viele Decimalstellen hat das verkürzte Produkt weniger, als das vollständige?

4. Gibt es in demselben Sinne auch einen verkürzten Quotienten? — Wonach entscheidet man, ob die erste, die

zweite, die dritte Ziffer u. s. f. des Quotienten zu den Ganzen oder zu den Decimalzahlen gehören?

5. Welche Resultate würde man aus den unten folgenden Aufgaben auf dem gewöhnlichen Wege erhalten?

b. Aufgaben.

1) $3{,}86402 \times 1{,}25068 = 4{,}83263$.
2) $8{,}6327546 \times 0{,}236456 = 2{,}04126659$.
3) $1{,}2358607 \times 0{,}0256073 = 0{,}031647054$.
4) $0{,}04326721 \times 0{,}035216244 = 0{,}0015237083$.
5) $3{,}04867 \times 3{,}7819 = 11{,}52974$.
6) $0{,}069687 \times 0{,}45876 = 0{,}0319693$.
7) $2{,}486235 : 1{,}623804 = 1{,}531118$.
8) $1{,}5807632 : 4{,}7268289 = 0{,}3344236$.
9) $0{,}12483967 : 5{,}6281398 = 0{,}02218134$.
10) $0{,}623487 : 0{,}83471295 = 0{,}7469478$.
11) $0{,}00248 : 3{,}0216574 = 0{,}0008207$.
12) $0{,}0006593 : 0{,}210832 = 0{,}003128$.
13) $0{,}2810945 : 0{,}02634854 = 10{,}668315$.
14) $15{,}2035682 : 0{,}01128367 = 1347{,}395679$.
15) $4 : 2{,}1236824 = 1{,}883521$.
16) $3 : 0{,}862475 = 3{,}47836$.

§. 6. Gemischte Aufgaben über die Bruchatren.

1) $2{,}4 + 1\frac{1}{5} - 0{,}06 - \frac{1}{8} - \left(0{,}01 + \frac{2}{5} + \frac{1}{200}\right) = 3.$

2) $2{,}12 - \left(\frac{8}{25} - 0{,}64\right) + 1\frac{3}{4} - 2{,}09 - \left(\frac{3}{2} - 1{,}4\right) = 2.$

3) $4 : 0{,}2 - \frac{1}{2} \times 1{,}3 + 0{,}3 \times 6\frac{1}{4} - 2{,}2 : 1\frac{2}{3} + \frac{19}{50} \times 0{,}25 = 20.$

4) $10 \times \left(1{,}9 - 0{,}3 : 1\frac{1}{4} - 0{,}8 : 8\right) \times \left(2\frac{1}{5} \times 0{,}2 - 1\right)$
$- (0{,}033 \times 8 - 10) = 1.$

5) $\left(0{,}5 + \frac{1}{3} - 1{,}25 + 7\frac{1}{8} + 14{,}75 + 9\frac{7}{12}\right) : \frac{1}{24} = 745{,}000\ldots$

6) $\frac{2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}}{5} + \frac{2{,}125}{4{,}2} - \frac{10{,}5 - 12\frac{3}{4}}{1\frac{1}{6}} + \frac{13\frac{2}{7}}{40} = 3{,}000\ldots$

7) $\left(\frac{7 - 3\frac{1}{2}}{1{,}5 - \frac{1}{4}} + \frac{6\frac{1}{3} - 4{,}4}{3{,}5} - \frac{5\frac{5}{8}}{2{,}25} - \frac{5{,}8}{42}\right) \times 28 = 20.$

8) $\frac{\frac{0{,}16}{4} \times (0{,}1 + 2\frac{1}{50})}{4{,}8 : 8 - 7} : \frac{1}{400} - \frac{3\frac{1}{2} : 10 - 10}{1 - 0{,}6} - \frac{4{,}125}{5} = 18.$

9) $\frac{0{,}48 : 6 - 2}{\frac{0{,}4}{5} : 2 - 1} + \frac{2{,}4 - 6}{0{,}1 : (0{,}2 - 3)} - \frac{0{,}34 - 0{,}18 : 3}{\frac{0{,}18}{0{,}2} - 40 \times 0{,}02} = 100.$

10) $\left(\frac{3 : 4{,}8 - 8}{2 - \frac{0{,}8}{1 : 0{,}5}} - \frac{1 - 0{,}2 : 4 - 2 : 0{,}4}{\frac{0{,}2}{8} \times (4 - 3\frac{1}{10})}\right) : \frac{2{,}5}{4}$
$+ \frac{\frac{3}{40} + 0{,}07 : 4 + 0{,}025 \times \frac{1}{20}}{0{,}25} = 281.$

11) $\left(\frac{3{,}2}{10} - \frac{4 : 0{,}5}{1\frac{1}{2} + 0{,}1} + \frac{2\frac{1}{8}}{1 : \frac{0{,}5}{10}} - \frac{1 - 2{,}2}{0{,}2} + 1\frac{2295}{4000}\right) : 3 = 1.$

12) $\left(\frac{10 - 2{,}5}{0{,}75 - \frac{1}{2}} + \frac{1\frac{3}{4} - 6{,}6}{5} - \frac{5\frac{5}{8}}{2{,}25} + \frac{1{,}2 - \frac{1}{40}}{2\frac{2}{5} + 0{,}1}\right) : \frac{1 : 1{,}6 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - 3{,}75 : 10} = 9.$

13) $\left(\left(\frac{1{,}8 + \frac{1}{5}}{0{,}6 - 1 : 2{,}5} - \frac{1\frac{3}{4} - 1}{\frac{1{,}5}{4} - \frac{12{,}5}{100}} - \frac{0{,}04 : 0{,}1 - 2{,}6}{\frac{3}{2{,}5} - 1}\right) \times 4 - \frac{5{,}6 - 4}{1 - 0{,}2}\right)$
$: \frac{2 - \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} - 0{,}3} = 10.$

14) $$\left(\frac{0{,}9-\frac{3}{20}}{\frac{0{,}5}{2}-\frac{1}{5}}+\frac{6-0{,}4}{10:\frac{1}{0{,}16}-2{,}4}\right):\frac{0{,}95+\frac{1}{4}}{0{,}35-\frac{1}{5}}-\frac{6\times 0{,}2-0{,}8}{1-0{,}9}\Bigg) = 2.$$

15) $$\left(\frac{\frac{0{,}25}{0{,}1}-\frac{0{,}75}{0{,}5}}{3-1:0{,}4}\times\frac{4-0{,}25}{\frac{3{,}5}{4}-0{,}05:0{,}1}:\frac{0{,}4-\frac{1{,}1}{2{,}5}}{0{,}6-1{,}4}+\frac{1-0{,}2}{1{,}2-\frac{4}{5}}\right)\times\frac{0{,}55-\frac{0{,}2}{2}}{0{,}4-\frac{1}{4}}-\frac{0{,}07\,.\,20-3{,}8}{1{,}8-1}=21.$$

16) $$\frac{2\frac{1}{2}+2}{0{,}2-\frac{0{,}75}{5}}:\left(\frac{0{,}33-0{,}1:10}{\frac{0{,}1}{4}-\frac{0{,}03}{2}}+\frac{1{,}75+\frac{5}{20}}{\frac{1}{4}-0{,}45}:\left(\frac{1{,}6-\frac{0{,}4}{4}}{1{,}1-0{,}4\times\frac{3}{2}}-\frac{0{,}7-5{,}8:\frac{10}{7}}{1{,}4+\frac{2{,}8}{5}-0{,}28}\right)\right)=3.$$

§. 7. Ueber Kettenbrüche.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter einem Kettenbruche, und was unter dessen Bruchgliedern?

2. Unterscheiden sich die Kettenbrüche wesentlich von den Bruchbrüchen? — Welcher Art von Bruchbrüchen namentlich entsprechen sie?

3. Wie verwandelt man einen jeden gemeinen Bruch, dessen Zähler größer als 1 ist, und einen jeden Decimalbruch, mit oder ohne Ganzen, in den entsprechenden Kettenbruch?

4. Welcher von den Bruchstrichen ist als Hauptbruchstrich dem Aequalzeichen gegenüber zu schreiben?

5. Was bedeuten die sogenannten Näherungswerthe? — Wie können sie auf eine zweifache Art berechnet werden?

6. Welche von den Näherungswerthen sind größer und welche kleiner, als der wahre Bruchwerth? — Welcher von allen kommt sonach diesem am nächsten?

7. Wie findet man den Unterschied zwischen dem wahren Bruchwerthe und irgend einem Näherungswerthe? — Wie heißen diese Differenzen bei den unten folgenden Aufgaben?

8. Wie groß ist der Unterschied zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungswerthen, wenn derselbe in der Form eines gemeinen Bruches ausgedrückt wird?

9. Auf welche Weise ergeben sich in den unten folgenden Aufgaben die Quotienten? — Und wie heißen dort die aus ihnen zu bildenden Kettenbrüche?

10. Wie verwandelt man umgekehrt einen jeden gegebenen Kettenbruch in den entsprechenden gemeinen?

b. Aufgaben.

Zu folgendem Bruche:

$$1)\ \frac{573}{991}\ \text{gehören}\left\{\begin{array}{llllllllll} \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{7}, & \frac{11}{19}, & \frac{37}{64}, & \frac{85}{147}, & \frac{122}{211}, & \left(\frac{573}{991}\right) & \text{als Näherungsw.} \\ 1, & 1, & 2, & 1, & 2, & 3, & 2, & 1, & 4 & \text{als Quot.} \end{array}\right.$$

$$2)\ \frac{1397}{8719}\ \text{geh.}\left\{\begin{array}{lllllll} \frac{1}{6}, & \frac{4}{25}, & \frac{25}{156}, & \frac{29}{181}, & \frac{228}{1423}, & \left(\frac{1397}{8719}\right) & \text{als Näherungswerthe.} \\ 6, & 4, & 6, & 1, & 7, & 6 & \text{als Quotienten.} \end{array}\right.$$

$$3)\ \frac{427}{293}\ \text{geh.}\left\{\begin{array}{llllllll} \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{16}{11}, & \frac{35}{24}, & \frac{51}{35}, & \frac{188}{129}, & \left(\frac{427}{293}\right) & \text{als Näherungswerthe.} \\ 1, & 2, & 5, & 2, & 1, & 3, & 2 & \text{als Quotienten.} \end{array}\right.$$

$$4)\ \frac{10373}{7279}\ \text{geh.}\left\{\begin{array}{llllllllll} \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{10}{7}, & \frac{57}{40}, & \frac{580}{407}, & \frac{637}{447}, & \frac{1217}{854}, & \left(\frac{10373}{7279}\right) & \text{a. N.} \\ 1, & 2, & 2, & 1, & 5, & 10, & 1, & 1, & 8 & \text{a. Q.} \end{array}\right.$$

5) $\frac{722}{1475}$ geh. $\frac{1}{2}, \frac{23}{47}, \frac{70}{143}, \frac{163}{333}, \left(\frac{722}{1475}\right)$ als Näherungswerthe.
$2,\ 23,\ 3,\ 2,\ 4$ als Quotienten.

6) $\frac{1371}{445}$ geh. $\frac{3}{1}, \frac{37}{12}, \frac{77}{25}, \frac{114}{37}, \frac{419}{136}, \left(\frac{1371}{445}\right)$ als Näherungswerthe.
$3,\ 12,\ 2,\ 1,\ 3,\ 3$ als Quotienten.

7) 0,0899 geh. $\frac{1}{11}, \frac{8}{89}, \frac{81}{901}, \left(\frac{899}{10000}\right)$ als Näherungswerthe.
$11,\ 8,\ 10,\ 11$ als Quotienten.

8) 2,18573 geh. $2\frac{1}{5}, 2\frac{2}{11}, 2\frac{3}{16}, 2\frac{5}{27}, 2\frac{8}{43}, 2\frac{13}{70}, 2\frac{164}{883}, 2\frac{341}{1836}$
$5,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 12,\ 2$

$2\frac{505}{2719}, 2\frac{1351}{7274}, 2\frac{8611}{46363}, \left(2\frac{18573}{100000}\right)$ a. N.
$1,\ 2,\ 6,\ 2$ a. Q.

II. Abschnitt.

Ueber Buchstabenrechnung.

§. 8. Ganze Buchstabengrößen.

A. Addition und Subtraktion.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter Buchstabenrechnung? — Wird durch dieses Wort die Sache richtig bezeichnet?

2. Müssen Buchstaben, welche in der Form von ganzen Zahlen erscheinen, darum bloß ganze Zahlen vorstellen?

3. Haben Buchstaben auch Nominal- und Lokalwerthe? Welchem Zahlensysteme gehören sie wohl an?

4. Können Buchstaben als solche addirt und subtrahirt werden? — Entsprechen sie hierin mehr den benannten, oder mehr den unbenannten Zahlen?

5. Was versteht man unter Coefficient? — In welcher Rechnungsverbindung steht er mit seinem zugehörigen Buchstaben? — Ist er Multiplikand oder Multiplikator? — Kann er auch nach dem Buchstaben seine Stelle haben?

6. Können selbst Buchstaben als Coefficienten gelten? — Wie heißt in dem Ausdrucke (—4ab) der Coefficient von b, wie der von ab, von 4ab und von (—4ab)?

7. Wann sind hier Glieder gleichartig, wann ungleichartig, wann gleich, wann entgegengesetzt? — Welche davon heißen additive oder positive, und welche subtraktive oder negative Glieder?

8. Können ungleichartige Glieder hier nicht gleichartig gemacht werden?

9. Wie werden gleichartige Glieder addirt? — Auf welche Weise werden ungleichartige Glieder addirt? — In welcher Ordnung pflegt man die Glieder nach einander zu schreiben?

10. Wie werden zwei gleichartige Glieder von einander subtrahirt?

11. Auf welche Weise wird von einem Gliede ein ihm ungleichartiges subtrahirt?

12. Wie werden subtraktive Glieder in additive, und umgekehrt, verwandelt?

13. Welche von den frühern Regeln finden auch hier wieder Anwendung?

14. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $(3+2)a+6+3b=5a+9b$,
2) $7m-2m+8-3a=5m+5a$,
3) $10a-(2a+10b)-6b=8a+4b$,
4) $3a+2b-(4m+7x)=5(a+b)-11mx$,
5) $4a+2aa+12bb-3b=6aaa+9b$

gefehlt? — Wie muß jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit sie deren rechter Seite entspricht?

b. Aufgaben.

1) $6c+3-ab-5b+3a-4b+a+c-10ab+7+4a+2+3c=8a-9b+10c-11ab+12$.

2) $2a+8c-5-3b+6ab-c+8aa-4ab+3-8a+9b-2aa-7c+2+4ab=6aa-6a+6b+6ab$.

3) $(13a + 13b - 13c - 13d) - (5a - 5b + 5c - 5d) = 8a + 18b - 18c - 8d.$

4) $3bc + ac - (4ab + b - 10) + 3c - 2abc - [4 - 3b - (6ac - 2bc) - 6ab + 6 + c] + 10abc - (2b + 2c) - 3ac + 5bc = 2ab + 4ac + 6bc + 8abc.$

5) $[3a - (mx + 7ab - b + 8m) + 10 - 5mm] - [m - 3ab - (7 + 7b + mx - 3a) - 3m - 26mm + 8b] + 10m - (5 - 4ab - 16m + 5mm) + 4mm + 8 = 20mm + 20m + 20.$

6) $$\frac{4}{5}b - \left(1\frac{1}{2}a - \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}c - \left(b - 2{,}25a + \frac{1}{3}\right) + 1\frac{2}{5}ab\right) - 6{,}1c\right) - \left(\frac{1}{2} + 4a - \left(1{,}6b - 7\frac{1}{5}c - 1{,}4ab\right) + 0{,}4b - 1\frac{3}{5}c\right) + 4\frac{1}{4}a = a + b + c.$$

7) $$3\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2}aab - \left(0{,}5aabb - \frac{1}{5}aaa + 3bbb\right) - \left(5\frac{1}{3} - \left(8aabb + \frac{2}{3}abb - \frac{1}{4}aab + \frac{1}{2}bbb\right) - 2\frac{1}{6}abb - \left(1{,}3aaa + 1\frac{2}{3}\right) - \frac{3}{4}aab + \frac{1}{2}aaa\right) - \left(\frac{5}{6}abb - 2\frac{1}{2}bbb - 2abb + 4\frac{1}{2}aabb\right) = aaa + 2aab + 3aabb + 4abb.$$

B. Multiplikation und Division.

a. Fragen.

1. Können Buchstaben als solche multiplicirt und dividirt werden?

2. Wie wird a) ein Buchstabe durch eine Zahl, und umgekehrt, b) wie ein Buchstabe durch einen andern multiplicirt? — Wann darf das Multiplikationszeichen weggelassen werden?

3. Wie wird ein Produkt a) durch einen ganz einfachen

Faktor, und umgekehrt, b) durch ein anderes Produkt multiplicirt? — In welcher Ordnung pflegt man die ungleichartigen Faktoren eines Gliedes zu schreiben?

4. Wie wird ein Polynomium a) durch ein Monomium, und umgekehrt, b) wie durch ein Polynomium multiplicirt? Wie viele Glieder erhält man dort, wie viele hier? — Wann findet eine Verminderung der Anzahl dieser Glieder Statt?

5. Ist es gleichgiltig, durch welches Glied des Multiplikators, und welches von dem Multiplikand zuerst multiplicirt wird?

6. Welches Qualitätszeichen bekommt ein Produkt, das aus drei, lauter subtraktiven Factoren zu bilden ist? — Stimmt dieß mit der Regel „gleiche Zeichen geben plus" überein?

7. Kann eine Zahl minusmal genommen werden? — Was bedeuten sonach die Zeichen $+$, $-$ oder $\pm$ vor dem Multiplikator?

8. Wie macht man die Probe hier?

9. Wie wird ein Buchstabe a) durch eine Zahl, und umgekehrt, b) durch einen andern Buchstaben dividirt? — Mittelst welches Divisionszeichens schreibt man gewöhnlich solche Quotienten an?

10. Wie und wie oft ist $(-a)$ in $(\pm a)$, in $(\mp aa)$ und in $(\pm aab)$, oder umgekehrt, enthalten?

11. Wie wird ein Produkt a) durch einen ganz einfachen Faktor und b) durch ein Produkt dividirt?

12. Wann ist ein Polynomium mit einem andern Polynomium übereinstimmend geordnet?

13. Wie wird a) ein Monomium durch ein Polynomium, und umgekehrt; b) wie ein Polynomium durch ein anderes Polynomium dividirt? — Ist es gleichgiltig, durch welches Glied des Divisors, und welches von dem Dividend zuerst dividirt wird?

14. Mit welchem bereits bekannten Verfahren stimmt das Dividiren eines polynomischen Dividends durch einen polynomischen Divisor überein?

15. Wie macht man die Probe hier?

16. Wie verwandelt man die erste und die zweite von den unten folgenden Aufgaben in Divisions-, dann die 5te, 8te, 9te, 10te und 12te Aufgabe in Multiplikationsaufgaben?

17. Wie müssen die Aufgaben von 5 bis 12 geschrieben werden, wenn alle Divisoren in Nenner verwandelt werden?

18. Welche von den frühern Regeln kommen auch hier wieder in Anwendung?

19. Wo und warum ist in den folgenden Beispielen:

1) $(5ab - 2a \times 3b) \times 4c = 20abc - 8ac \times 12bc$,

2) $(3ab - 2abb) \times (m \times - 2b) = 3amb - 2abmb - 6bab + 4bbba$,

3) $(3a - \frac{1}{2}b) \times (2a + 4b) = 6aa - 2bb$,

4) $(18ab - 15aab \times 36abb) : -3ab = -6 + 5a \times -12b$,

5) $(24aa - 12abb + 12aabb) : 12aabb = 2bb - a$,

6) $3a : (0{,}42ab - 21aa + 0{,}21a) = 0{,}14b - 7a + 0{,}7$,

7) $(81aaaa - bbbb) : (3a - b) = 27aaa + bbb$,

8) $(40aaaa + 31aaa + 6aa) : (2a + 5aa) = 20aaa + \ldots$

gefehlt? — Wie müßte in den Beispielen von 1) bis 7) jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte? — Was ist an dem 8ten Beispiele zu tadeln?

b. Aufgaben.

1) $(2ab - 3aab + 10c - 4) \times 5abc = 10aabbc - 15aaabbc + 50abcc - 20abc$.

2) $\left(16aaa + 4aab + abb + \frac{1}{4}bbb\right) \times (4a - b) = 64aaaa - \frac{1}{4}bbbb$.

3) $\frac{1}{6}ab \times [1 - 3ab \times (4 + 7a)] - \frac{1}{2}b \times \left(2\frac{1}{3}a - 6ab \times (1\frac{1}{2}aa + 3a) + 14aab\right) = aaabb - ab$.

4) $\left[\frac{1}{18}\times\left(6a-\frac{3}{4}b\times\left(7a-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}x\right)+\frac{1}{48}\times\left(14ab-15a+\frac{8}{9}x\right)\right]\times 12x=\frac{1}{4}ax+\frac{1}{4}bx.$

5) $(12aab+10abb-8aabb-6ab):3ab=4a+3\frac{1}{3}b-2\frac{2}{3}ab-2.$

6) $\left(1\frac{3}{4}aaaab-aabb-\frac{1}{8}aax\right):\frac{1}{2}a-\left(\frac{1}{3}aabbbbx-\frac{1}{12}aabbxx-\frac{1}{6}aaaabbbx\right):\frac{1}{3}abbx=4aaab-3abb.$

7) $\left[\left(\frac{0{,}8}{3}abbxxx-\frac{8}{9}aabbxx-3\frac{1}{3}aaaabmmxx\right):-\frac{2}{3}abxx-(0{,}4aabbbmm-0{,}525aaaabbmmmm-0{,}12abbbmmx):0{,}3abbmm\right]:\frac{9}{8}aam=6am.$

8) $(9bb-24ab+16aa):(4a-3b)=4a-3b.$

9) $\left(7aab-\left(\frac{1}{2}abb-4bb-16aaa\right)+8ab\right):\left(8aa+4b-\frac{1}{2}ab\right)=2a+b.$

10) $\left(16aaaa-\frac{1}{16}bbbb\right):\left(\frac{1}{2}b+2a\right)=8aaa-2aab+\frac{1}{2}abb-\frac{1}{8}bbb.$

11) $\left(\left(\frac{1}{2}aa-0{,}1ax+\frac{0{,}4}{3}x\right)\times 9axx-\frac{2}{3}aaxxx\times\left(9aa-1{,}8ax+2\frac{2}{5}x\right)\right):\left(0{,}4xx+1\frac{1}{2}aax-0{,}3axx\right)=3ax-4aaxx.$

12) $(16aaabbc-0{,}16abbc-1{,}6aabbbc):-(2abb+0{,}2b-20aab)=0{,}8abc.$

§. 9. Brüche.

A. Addition und Subtraktion.

a. Fragen.

1. Wann ist m das Maß a) eines Polynomium, b) eines Produktes und c) eines Quotienten?

2. Wie findet man bei allgemeinen Zahlen das größte gemeinsame Maß? — Wie findet man hier den kleinsten gemeinsamen Dividend? — Wozu braucht man jenes, und wozu diesen?

3. Wann haben Brüche, deren Zähler oder Nenner aus allgemeinen Zahlen oder Buchstaben bestehen, die relativ einfachste Benennung?

4. Wann sind diese Brüche gleichnamig? — Wie werden ungleichnamige Brüche gleichnamig gemacht?

5. Wann und wie werden Brüche reducirt, a) wenn Zähler und Nenner aus lauter Faktoren bestehen, b) wenn entweder der Zähler, oder der Nenner polynomisch ist, und c) wenn Zähler und Nenner polynomisch sind?

6. Können auch einzelne Glieder der Polynomien, wenn z. B. das eine Glied im Zähler, das andere im Nenner steht, unter sich reducirt werden?

7. Wie vielgliederig ist ein Bruch, dessen Zähler n Glieder hat; welche Stelle vertritt demnach der Bruchstrich zugleich?

8. Wie verwandelt man einen Bruch mit polynomischem Zähler in ein wirkliches Polynomium, und umgekehrt? — Wann ändert sich hiebei die Qualität sämmtlicher Glieder?

9. Wie vielgliederig ist ein Bruch, dessen Zähler monomisch, dessen Nenner aber polynomisch ist? — Kann ein solcher Bruch ebenso leicht in ein Polynomium verwandelt werden?

10. Worin besteht die Addition gleichnamiger Brüche?

11. Wie werden ungleichnamige Brüche unter sich und zu ganzen allgemeinen Zahlen addirt?

12. Wie wird von einem Bruche a) ein anderer ihm gleichnamiger, b) eine ganze Zahl, und umgekehrt, c) wie ein ihm ungleichnamiger Bruch subtrahirt?

13. Kann es auch allgemeine Decimalbrüche geben?

14. Welche frühern Regeln werden auch hier in Anwendung kommen?

15. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $2-\left(\frac{a}{b}-\frac{4c}{3b}\right)=\frac{6b-3a-4c}{3b}$,

2) $\frac{c}{b+3}-\frac{a}{b}=\frac{c}{b+3}-\frac{a+3}{b+3}$,

3) $\frac{abc}{amx}+\frac{m-5}{x-5}=\frac{bc}{mx}+\frac{m}{x}$,

4) $\frac{a}{1-x}+\frac{m}{x-1}+\frac{b+2}{1+x}=\frac{a}{1-x}-\frac{m}{1-x}+\frac{b-2}{1-x}$,

5) $\frac{a}{x}-\frac{b-8}{1+x}=\frac{a+ax-bx-8x}{x(x+1)}$,

6) $\frac{3m}{bm}+\frac{3+m}{am-bm}=\frac{3}{b}+\frac{3+1}{a-b}$,

7) $\frac{(a-1)\times 2b}{x}-\frac{a+b}{mx}=\frac{(am-m)\times 2bm-a+b}{mx}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit sie deren rechter Seite entspräche?

b. Aufgaben.

1) $\frac{2a}{b}+\frac{3a}{b}=\frac{5a}{b}$,

2) $a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$,

3) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}-\frac{c}{d}=\frac{acd+bbd-bcc}{bcd}$.

4) $\frac{a}{a-b}-\frac{a+b}{a}+\frac{b}{b-a}+\frac{a+b}{a-b}=\frac{aa+bb}{aa-ab}$.

5) $\frac{a}{b}-\frac{bb-a}{ab}+\frac{bc+2c}{ac}-\frac{2}{a}=\frac{a+1}{b}$.

6) $\frac{ab-6a}{2b}-\frac{2c-ad}{2d}+\frac{bc+3ad}{bd}=a$.

7) $\frac{(3b+1)\times a}{3b}-\frac{2ab-a}{2b}+\frac{a}{6b}=\frac{a}{b}$.

8) $\frac{bb+3ac}{bc}-\frac{2aa-5bb}{ab}-\frac{ab+4bc}{ac}=\frac{aa+bb}{ab}$.

9) $\frac{7b-3a}{3b}-\frac{2m-x}{2x}+\frac{ax+bm}{bx}-\frac{1}{6}=2\frac{2}{3}$.

10) $\frac{5ag-2d}{5g}-\frac{9b-8c}{12c}+\frac{8cd+15bg}{20cg}-\frac{2+3x}{3}=a-x$.

B. Multiplikation und Division.

a. Fragen.

1. Wie werden Brüche, deren Zähler und Nenner ganz oder zum Theil aus allgemeinen Zahlen bestehen, multiplicirt und dividirt?

2. Müssen oder sollen die Glieder von Polynomien vor oder nach der Operation gleichnamig gemacht und dieselben in formelle Monomien verwandelt werden?

3. Wie werden Polynomien, Produkte und Quotienten, wenn sie als Divisoren vorkommen, umgestürzt, d. i. in Faktoren verwandelt?

4. Wann erscheint der Quotient als ein endliches, wann als ein unendliches Polynomium? — Haben letztere, sowie unendliche Decimalbrüche, Perioden? — Wann wechseln bei den einzelnen Gliedern die Vorzeichen, wann nicht?

5. Wie macht man sowohl bei endlichen als auch bei unendlichen Quotienten die Probe?

6. Ist es gleichgiltig, ob man den ersten Rest oder das nächste Glied des Dividends theilt, um für den Quotienten das zweite Glied zu erhalten?

7. Warum stehen die letzten drei Aufgaben, da doch Dividend und Divisor nur ganze Zahlen enthalten, nicht unter den Aufgaben des §. 8.? — Wie müßte man in der 13ten und 14ten Aufgabe verfahren, damit jedes Glied des Quotienten in der Form einer ganzen Zahl erschiene?

8. Welche frühern Regeln werden auch hier wieder Anwendung finden?

9. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $4:\frac{3}{4}\times\frac{m}{x}-6:5.\frac{p-q}{x-z}=4\times\frac{4}{3}\times\frac{m}{x}-6\times5.\frac{x-z}{p-q}$,

2) $2\frac{1}{2}a:\frac{2}{3}b+\frac{1}{m}:3\frac{1}{8}x=\frac{5}{2}a\times\frac{3b}{2}+\frac{1}{m}\times\frac{8}{25}x$,

3) $x:\frac{\frac{2}{3}a-b}{m-\frac{3}{5}}=x\times\frac{m-\frac{5}{3}}{\frac{3}{2}a-b}$,

4) $p.\frac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}}-q:\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{8}{x}}=p\times\frac{\frac{b}{a}}{\frac{n}{m}}-q\times\frac{\frac{x}{8}}{\frac{2}{3}}$,

5) $a:\left(\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\right)+3:\left(\frac{b}{m}+\frac{b}{x}\right)=a\times\frac{a}{b-x}+3\times\frac{m+x}{b}$,

6) $m:\frac{4}{a+b+c}+x:\frac{a+b+c}{4}=m\times\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4}\right)$
$+x\times\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $\left(\frac{a}{2}-\frac{2b}{3a}+\frac{ab}{c}-\frac{aa}{6b}\right)\times\frac{3bc}{2a}=\frac{3}{4}bc-\frac{bbc}{aa}+\frac{3}{2}bb-\frac{1}{4}ac.$

2) $\left(\frac{1}{2}.\frac{a}{b}+\frac{3}{c}.\frac{1}{4}b-\frac{5}{d}.\frac{c}{6}\right)\times2\frac{2}{5}b\times\frac{d}{ac}=\frac{6d}{5c}+\frac{9bbd}{5acc}-\frac{2b}{a}.$

3) $\left(\frac{a+x}{x}-\frac{2x}{x-a}\right)\times\frac{x-a}{aa+xx}=-\frac{1}{x}.$

4) $\left(\frac{4aa-3a}{4}-\frac{5ac-12b}{20c}-\frac{3b}{5c}\right)\times-\frac{b}{1-a}=ab.$

5) $\left(\frac{6a}{5b}-\frac{2{,}4ab}{cc}-3\frac{3}{5}.\frac{ab}{c}+4{,}8a\right):1\frac{1}{5}.\frac{a}{c}=\frac{c}{b}-\frac{2b}{c}-3b$
$+4c.$

6) $\left(\frac{21abpx-30ccq}{35cqx}+\frac{18bc-14ax}{21bx}-\frac{3abbp-10acq}{15bcq}\right)$
$:\frac{0{,}1bp}{ccq}=4ac.$

7) $\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-x}{a}\right):\frac{aa+bx}{bb}=\frac{b}{a}.$

8) $\left(\frac{49ax-15bc}{35bx}-\frac{2a-35b}{5b}+\frac{3c-56x}{7x}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$
$=\frac{aa-ab}{a+b}.$

9) $\left(\frac{2c+\frac{1}{2}ab}{4c}-\frac{b-a}{3b}-\frac{3abb+8ac}{24bc}\right)\times\left(3-\frac{a}{b}\right)$
$:\frac{3ab-aa}{6b}=\frac{1}{a}$.

10) $\left(\frac{6x}{5b}-\frac{2m}{3}-\frac{cx+20ab}{5ac}+\frac{2cm+12b}{3c}\right)\times\frac{10a}{bx}$
$:\left(\frac{6a}{b}-1\right)=\frac{2}{b}$.

11) $\frac{10-3am+10a-3m}{25am+50m}:\left(\frac{2}{5m}-\frac{3}{25}\right)=\frac{a+1}{a+2}$.

12) $\left(\frac{2}{b+3}+\frac{5am-2x-10a+mx}{3bc+9c}:\frac{20a+4x}{12c}\right):\frac{4m-2mx}{2b-bx-3x+6}$
$=\frac{1}{2}$.

13) $a:(a+1)=1-\frac{1}{a}+\frac{1}{aa}-\frac{1}{aaa}+\ldots$

14) $(1+a):(a-1)=1+\frac{2}{a}+\frac{2}{aa}+\frac{2}{aaa}+\ldots$

15) $(2a-3x):(3b+4x)=\frac{2a}{3b}-\frac{8ax}{9bb}+\frac{32axx}{27bbb}-\frac{128axxx}{81bbbb}+\ldots$
(genauer)
$=\frac{2a}{3b}-\frac{x}{9bb}(8a+9b)+\frac{4xx}{27bbb}(8a+9b)-\frac{16xxx}{81bbbb}(8a+9b)+\ldots$

Anhang.

Vereinfachung durch Zerlegung.

a. Fragen.

1. Welche Ausdrücke lassen sich in Faktoren zerlegen?
2. Wann können dadurch Brüche vereinfacht werden? — Mit welcher frühern Operation fällt diese zusammen? — Ist es

dabei ganz gleichgiltig, was für Faktoren im Zähler und im Nenner gebildet werden?

3. Welche Faktoren von den Gliedern eines Polynomium darf man außerhalb der Klammern setzen; welche bleiben sonach zurück?

4. Was bleibt, wenn der auszuklammernde Faktor einmal als ganzes Glied vorkommt, von diesem Gliede innerhalb der Klammern zurück?

5. Darf und muß bisweilen (—1) als ein solcher Faktor ausgeklammert werden? — Muß bei einem Bruche dieser Faktor aus dessen Zähler oder aus dessen Nenner genommen werden?

6. Wie überzeugt man sich schnell von der Richtigkeit dieses Verfahrens?

7. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $$\frac{3(a+b)}{m(b+a)}-\frac{2(a-b)}{m(b-a)}=\frac{3}{m}-\frac{2}{m},$$

2) $$\frac{3a}{5x}+\frac{3x}{5a}=\frac{3(a+x)}{5(x+a)},$$

3) $$\frac{2a-4}{6a-8}-\frac{mx+m-bm}{bx+b-bb}=\frac{2(a-2)}{6(a-2)}-\frac{m(x-b)}{b(x-b)},$$

4) $$\frac{2am+2\frac{1}{2}m}{6a+3}+\frac{1\frac{2}{3}x-\frac{2}{6}xx}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}=\frac{2m(a+\frac{1}{2})}{6(a+\frac{1}{2})}+\frac{\frac{2}{3}x(1-\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}x)},$$

5) $$\frac{2am+(8a-2ab).6ax}{10am-(10ab-40a).30ax}=\frac{2a[m+(4-b).3x]}{10a[m+(4-b).3x]},$$

6) $$\frac{2bx-x}{ab-\frac{1}{2}a}-\frac{m-\frac{1}{3}am}{\frac{1}{2}ab-1{,}5b}=\frac{x(2b-1)}{a(2b-1)}+\frac{m(1-\frac{1}{3}a)}{\frac{1}{2}b(3-a)},$$

7) $$\frac{6aab-30abb}{6aa-30ab}+\frac{4a}{5b}+\frac{12x}{10m}=\frac{3ab(2a-10b)}{2a(3a-15b)}+\frac{4(a}{5(b}+\frac{3x)}{2m)}$$

gefehlt? — Wie müssen die linken Gleichungsseiten von den Beispielen 1) bis 6) heißen, damit sie ihren rechten Seiten entsprechen? — Was ist am 7ten Beispiele zu tadeln?

b. Aufgaben.

1) $ax + bx = x(a + b)$.
2) $ax - bx = x(a - b) = -x(b - a)$.
3) $4ax - x = x(4a - 1) = 4x(a - \frac{1}{4})$.
4) $2a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(4a - 1) = -\frac{1}{2}(1 - 4a)$.
5) $6ax - 2xx = 2x(3a - x)$.
6) $-0{,}12a + 4b = 4(b - 0{,}03a)$.
7) $0{,}15ab - 0{,}3b = 0{,}3b(0{,}5a - 1)$.
8) $0{,}24ax - 0{,}03bx = 0{,}03x(8a - b)$.
9) $6\frac{3}{4} + 12a = 3(2\frac{1}{4} + 4a)$.
10) $x(a - b) - 4(b - a) = (a - b)(x + 4)$.
11) $aa + 2ab + bb = aa + ab + ab + bb = (a + b)(a + b)$.
12) $aa - ax - 6xx = aa + 2ax - 3ax - 6xx = (a + 2x)(a - 3x)$.
13) $aaa + aab - abb - bbb = (aa - bb)(a + b)$.
14) $aaa - 2aab + abb = a(a - b)(a - b)$.
15) $7abb - 4bbb - 3aab = b(a - b)(4b - 3a)$.

16) $(6ax - 6a) : (bx - b) = \frac{6a}{b}$.

17) $(12abbb - 2aaaabbbbb) : (4aaaaabbb - 24aab) = -\frac{bb}{2a}$.

18) $\frac{2aa + 6a}{10ab - 2aa} + \frac{3bbc - 9bc}{15bbc - 3abc} = \frac{a + b}{5b - a}$.

19) $\frac{5aac + 5abc}{2ab + 2bb} - \frac{9acm + 6acx}{6bm + 4bx} = \frac{ac}{b}$.

20) $\frac{aa - a}{2a - 2} + \frac{1 - \frac{1}{4}ab}{\frac{2}{a} - \frac{1}{2}b} = a$.

21) $\frac{5m + 0{,}4}{1{,}2 + 15m} - \frac{abm - 8aam}{12aam - \frac{3}{2}abm} + \frac{5ax - (7a - 2a) \cdot x}{2b + 4c} = 1$.

22) $$\frac{\frac{mx}{aa}-\frac{mxx}{aaaa}}{\frac{2m}{a}-\frac{2mx}{aaa}}+\frac{\frac{1}{2}abx-4bxx}{12abx-1\frac{1}{2}aab}-\frac{7,5bmmx-12,5bbmx}{15abbm-9abmm}=\frac{x}{a}.$$

23) $$\frac{aa-bb}{2a-2b}=\frac{aa+ab-ab-bb}{2a-2b}=\frac{a+b}{2}.$$

24) $$(aa-bb):(6a+6b)=\frac{1}{6}(a-b).$$

25) $$\frac{36mm-1}{6m-1}+\frac{4-9mm}{1+\frac{3}{2}m}+\frac{0,03-1\frac{1}{8}mm}{\frac{2}{3}m+0,1}+\frac{3bb-3aa}{10aa-10bb}$$
$$=5-2m.$$

§. 10. Zahlen statt der Buchstaben zu substituiren.

a. Fragen.

1. Was versteht man in der Mathematik unter Substituiren?
2. Wo dienen Substitutionen als Proben?
3. Ist hiebei die Wahl der zu substituirenden Zahlen willkürlich? — Dürfen aber in einer und derselben Aufgabe oder Probe für den nämlichen Buchstaben mehrerlei Werthe genommen werden?
4. Können beim Substituiren die weggelassenen Multiplikationszeichen noch vernachlässigt bleiben?
5. Wann ist hierbei der hinweggelassene Coefficient (1) wieder zu schreiben?
6. Sollen während des Substituirens die angezeigten Operationen sogleich ausgeführt werden?
7. Welche frühern Regeln kommen hier ebenfalls in Anwendung?
8. Wo und warum ist, wenn —2 anstatt a, 3 anstatt b,

$-\frac{1}{2}$ anstatt c und $-1\frac{1}{3}$ anstatt m substituirt wird, in den folgenden Beispielen:

$$1)\ \frac{1\frac{1}{2}a}{b-3a}+\frac{2a}{1-a}=\frac{1\frac{1}{2}\times-2}{3-3\times-2}+\frac{2-2}{1-2}$$

$$2)\ \frac{ac}{m-b}-\frac{a-m}{2b+\frac{1}{2}c}=\frac{2\frac{1}{2}}{-1\frac{1}{3}-3}-\frac{-2-1\frac{1}{3}}{6-\frac{2}{2}}$$

$$3)\ \frac{0{,}4b-2cm}{(4+a).c}\times\frac{b-c}{b-a}=\frac{0{,}43+2\frac{1}{2}.\frac{4}{3}}{(4+-2).-\frac{1}{2}}\times\frac{3\frac{1}{2}}{3--2}$$

$$4)\ \frac{8a+0{,}1b}{(3-a)b}:-\frac{a-c}{b-0{,}5a}=\frac{6+0{,}13}{1.3}:\frac{2+0{,}5}{3+0{,}10}$$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite umgeändert werden, damit aus ihr deren rechte Seite entstehen könnte?

b. Aufgaben.

1. Welche Summe gibt folgender Ausdruck?

$$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{13ab}{ac-d}\right)+\frac{c-2d}{3b+2c}$$

1) für $a=2$; $b=1$; $c=-2$; $d=-1$? — Antw. $10\frac{2}{3}$.
2) für $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{2}{3}$; $c=0{,}2$; $d=-1\frac{1}{5}$? — Antw. $-5\frac{1}{4}$.
3) für $a=-2\frac{1}{2}$; $b=5$; $c=-388{,}5$; $d=-3\frac{3}{4}$? — Antw. 1.

2. Welche Differenz gibt folgender Ausdruck:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b+c}{d}\right)-\frac{aa}{b-c}$$

1) für $a=3$; $b=2$; $c=5$; $d=-2$? — Antw. 1.
2) für $a=1\frac{1}{2}$; $b=-1$; $c=\frac{1}{2}$; $d=-\frac{1}{4}$? — Antw. 2.
3) für $a=2$; $b=\frac{2}{5}$; $c=0{,}2$; $d=\frac{5}{8}$? — Antw. $-14\frac{1}{25}$.

3. Welches Produkt gibt folgender Ausdruck:

$$\left(\frac{aa - 2\frac{1}{2}b}{bb - \frac{1}{5}aa} - \frac{3ac - 2d}{\frac{4}{5}a - 0{,}2bc}\right) \times \frac{6bc - 2ad}{5c + bd}$$

1) für $a = -4$; $b = 2$; $c = -1$; $d = 5$? — Antw. 81.
2) für $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = \frac{2}{3}$; $d = -\frac{2}{3}$? — Antw. $-\frac{10}{11}$.
3) für $a = b = c = d = -1$? -- Antw. $-9\frac{3}{8}$.

4. Welchen Quotienten gibt folgender Ausdruck:

$$\left(\frac{2ax}{3a - b} + \frac{x}{b - 2a}\right) : \left(\frac{4x}{a + 2b} + \frac{12bc}{6c + a}\right)$$

1) für $a = 2{,}4$; $b = -0{,}2$; $c = 7$; $x = \frac{3}{4}$? — Antw. $\frac{3}{10}$.
2) für $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$; $c = \frac{1}{8}$; $x = -\frac{1}{16}$? — Antw. $\frac{2}{3}$.
3) für $a = b = c = x = -1$? — Antw. $5\frac{1}{4}$.

III. Abschnitt.

Ueber die Potenz- und Wurzelgrößen.

§. 11. Ueber die Potenzgrößen.

A. Addition und Subtraktion.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter einer Potenzgröße oder Potenz? — Aus wie vielerlei Zahlen ist sie gebildet? — Wie heißen dieselben, und was bedeutet jede?

2. Wie heißt der Exponent von einem jeden Monomium (Zahl, Buchstabe, Produkt, Quotient), sowie von einem jeden Polynomium?

3. Können auch Buchstaben, Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten, ja selbst Potenzen u. s. f. als Exponenten vorkommen?

4. Wie heißt in dem Ausdrucke $\left(8m^{-x^2} + a^{p-q} + \frac{b^{-4}}{c^5}\right)$ der Exponent von 5, von c^5, von 4, von -4, von b^{-4}, von $\frac{b^{-4}}{c^5}$, von q, von p, von $p-q$, von a^{p-q}, von $a^{p-q} + \frac{b^{-4}}{c^5}$,

von 2, von x^2, von $-x^2$, von m^{-x^2}, von 8, von $8m^{-x^2}$ und von $8m^{-x^2}+a^{p-q}+\frac{b^{-4}}{c^5}$?

5. Wann sind einfache Potenzen gleichartig, gleichnamig, gleich; und wann entgegengesetzt? — Wann sind sie ungleichartig, ungleichnamig und ungleich?

6. Wann sind nun Produkte, Quotienten und Polynomien, in so ferne darin Potenzen vorkommen, gleichartig, gleichnamig, ungleichartig und ungleichnamig?

7. Können ungleichartige und ungleichnamige Potenzen gleichartig und gleichnamig gemacht werden?

8. Wie werden gleichartige Potenzgrößen addirt? — Worin besteht das Addiren der ungleichartigen? — In welcher Ordnung pflegt man die ungleichartigen Glieder zu schreiben?

9. Wie werden zwei gleichartige Potenzgrößen von einander subtrahirt? — Wie verfährt man hier bei ungleichartigen Potenzgrößen?

10. Wie müssen die Glieder in den unten folgenden Aufgaben von 1) bis 4) geschrieben werden, damit alle Potenzen verschwinden, und diese Aufgaben sowie die im §. 8 behandelt werden können?

11. Welche frühern Regeln kommen auch hier wieder in Anwendung?

12. Wo und warum ist in den folgenden Beispielen:

1) $a^m+a^m-(6a^3+2a^2)=2a^{2m}-8a^5$,
2) $10a^8-3a^8+7a^2-2a^{-2}=7a^8+5a^{\pm 2}$,
3) $(2+3)a^3b^4-(4+2a^6b)=5a^3b^4-6a^6b$,
4) $3a^m+7b^m+5a^4-3b^4=10(a^m+b^m)+2(a^4-b^4)$,
5) $4^3+2^3+7^2-3^2=6^3+4^2$,
6) $5a^{x^2}+3a^{2x^2}-(10b^{3m^x}-2b^{2m^x})=8a^{3x^2}-8b^{m^x}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite ge-

schrieben werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $6a^3 - 8 + 5a^2b - 8a^3b^3 + 7ab^2 - a^3 - 6ab^3 - 2a^2b + 3ab - 5a^3 + 2 + 2ab^3 - 2a^3b^3 - 5ab^2 + 6 + 10a^3b^3 - 2ab + 4ab^3 = 3a^2b + 2ab^2 + ab.$

2) $6a^5b - (a^6 + 4 + 2a^3b^3 + 2a^2b^4) + 6a^2b^4 + 5a^6 - (3a^4b^2 + 2 - 2a^5b) - [5a^3b^3 + 8a^5b - (7a^3b^3 + 3a^4b^2 - 2a^6 - 4a^2b^4)] + 8 = 2a^6 + 2.$

3) $[6a - 3a^2b^4 - (8a^5b^2 - 10ab^5 - 6a^5b^3) - 3b] - [4ab^5 - 14a^5b^2 - (9b - 6a) + 3a^2b^4] = 6ab^5 - 6a^2b^4 + 6a^5b^3 + 6a^5b^2 + 6b.$

4) $7ax - [5a - 3x^2 - (5x^4 - 9 + 7a) + 2a^4] - 2b^2x + 4abx - [3a^4 - (2x^2 - 4ax - (8b^2x + 2a) - 6x^4 + 5abx) - 6a^4 - 13] + 10b^2x - (5x^2 + 9abx + 3ax) = a^4 - x^4 + 4.$

5) $\frac{2}{5}b^2 + 0{,}1 - \left(\frac{3}{7}b^2 - a + 0{,}6a^2b - \frac{1}{4}m - 3\frac{2}{5}ab\right) - \left[\frac{2}{21}b - \left(2\frac{1}{5}a^2b - 1\frac{1}{2}a + 0{,}1b^2\right) + \frac{5}{12}m - \frac{3}{7}b - \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{3}b^2 - \left(1{,}4ab - \frac{1}{6}m\right) + \frac{2}{5} + \frac{2}{21}b^2 - 2ab\right) - \frac{1}{6}b^2 + 1\frac{3}{5}a^2b\right] = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}.$

6) $\frac{4}{15}b^m - \left(\frac{1}{12}a^m - 0{,}2a^m b - \frac{5}{8}b^{2m} + 0{,}6b^m - \left(\frac{1}{2}a^m + 0{,}23a^3x^2\right)\right) - \left(0{,}9a^m b - \frac{b^{2m}}{24} - \left(\frac{1}{3}a^m - \frac{1}{4}a^3x^2 - \left(\frac{2}{3}b^m - \frac{1}{2}a^m b + \frac{2}{3}b^{2m} - \frac{1}{50}a^3x^2 - \frac{1}{4}a^m - \frac{1}{5}a^m b\right)\right)\right) = a^m - b^m.$

$$7)\ -\left(\frac{2}{3}a^{-2}b-\left(\frac{1}{4}a^{-2m}+\frac{7}{8}a^{2}-\frac{11}{24}a^{m-2}\right).b-2\frac{1}{2}ab^{3}\right.$$
$$\left.+\frac{5}{6}ab^{-3}\right)-\left(\frac{1}{8}a^{m-2}b-\left(3\frac{2}{3}a^{-2}b-\left(\frac{2}{5}a^{-2m}b\right.\right.\right.$$
$$-\left(\frac{1}{5}ab^{-3}+\frac{3}{8}a^{2}b+\frac{7}{12}a^{m-2}b-\left(2{,}5ab^{3}-0{,}15a^{-2m}b\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\left.-\frac{19}{30}ab^{-3}-1\frac{3}{4}a^{2}b\right)\right)\right)\right)\right)=3a^{2}b+3a^{-2}b.$$

B. Multiplikation.

a. Fragen.

1. Wie werden gleichartige Potenzen multiplicirt? — Wie verfährt man bei ungleichartigen?

2. Wie viele und welche Glieder hat das Produkt, wenn die Summe zweier Größen durch die Differenz derselben zwei Größen multiplicirt wird? — In welchen von den unten folgenden Aufgaben kommt dieser Fall vor?

3. Welche frühern Regeln können auch hier wieder Anwendung finden?

4. Wo und warum ist in den folgenden Beispielen:

1) $6a^{2}b^{3}\times-3ab^{2}+5a^{3m}b^{5}\times7a^{4m}b^{3}=18a^{2}b^{6}+35a^{2+7m}b^{8}$,

2) $5a^{2m}b^{3}\times\left(3a^{3m}b^{4}-1\frac{1}{2}a^{3}b^{4m-1}\right)=15a^{5m}b^{7}-\frac{15}{2}a^{5m}b^{7m-1}$,

3) $2a^{2}\times3a^{2}b+2^{2}a^{3}\times3^{2}b^{4}=6a^{4}b+6^{4}a^{3}b^{4}$,

4) $8a^{m^2}b^{-3}\times7a^{m^2}b^{4x^3}-a^{2m^2}\times a^{3m^2}b=56a^{m^4}b^{4x^3-3}-a^{6m^4}b$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $(3a^3b^2 - 5a^2b - 7a + 9b^{-1}) \times 6a^2b^3 = 18a^5b^5 - 30a^4b^4$
$- 42a^3b^3 + 54a^2b^2$.

2) $\left(2\frac{1}{2}a^{m-2}b^5 - \left(\frac{3}{4}a^{2m-3}b^2 - 0{,}3a^{-m}\right) - 9a^{-1}b^{-2}\right)$
$\times \frac{2}{3}a^{2m-1}b^{-3} = \frac{5}{3}a^{3m-3}b^2 - \frac{1}{2}a^{4m-4}b^{-1} + 0{,}2a^{m-1}b^{-3}$
$- 6a^{2m-2}b^{-5}$.

3) $\left(0{,}3a^{1-m}b^{1\frac{3}{5}} - \left(3\frac{1}{4}a^{3m}b^{\frac{1}{2}} - 5a^{-2}b^{0,4}\right) + \frac{5}{8}a^{m-2}b\right)$
$\times - 0{,}2a^{3-m}b^{-0,6} = 0{,}65a^{2m+3}b^{-0,1} - a^{1-m}b^{-0,2} - \frac{1}{8}ab^{0,4}$
$- 0{,}06a^{4-2m}b$.

4) $4a^{5m-2}b^{-2}x^{5,2} \times - \frac{1}{2}a^{-(m-3)}b^4x^{-1\frac{1}{5}} \times - 3\frac{1}{2}a^{3m+6}b^5x^3$
$= 7a^{7m+7}b^7x^7$.

5) $1\frac{2}{3}a^6m^{-6}x^3 \times \left(1\frac{1}{5}a^{-7}m^4x^{-6} - 2\frac{2}{5}a^{-2,7}m^{8\frac{1}{5}}x^{-1,9}\right)$
$\times - 1\frac{1}{2}a^{0,7}m^{1,8}x^{2,9} = 6a^4m^4x^4 - 3a^{-0,3}m^{-0,2}x^{-0,1}$.

6) $\left(\frac{2a^3}{3b^3} - \frac{5a^2}{7b^4} + \frac{8a}{11b^5} - \frac{11}{14b^6}\right) \times \frac{21a^{-4}}{40b^{-2}} = \frac{7a^{-1}}{20b} - \frac{3a^{-2}}{8b^2}$
$+ \frac{21a^{-3}}{55b^3} - \frac{33a^{-4}}{80b^4}$.

7) $\left(\frac{2a^3b}{5c^2d^2} - \frac{a^{-2}b^4}{6c^{-5}d^3} - \frac{3ab^{-2}}{4c^{-2}d}\right) \times \frac{5a^3b^{-3}}{6c^4d^{-4}} = \frac{a^6b^{-2}}{3c^6d^{-2}}$
$- \frac{5ab}{36c^{-1}d^{-1}} - \frac{5a^4b^{-5}}{8c^2d^{-3}}$.

8) $3\frac{1}{3} \times \frac{a^{3-3m}}{b^{-(3-3m)}} \times \left(\frac{4a^{8(m-1)}}{5b^{-8(m-1)}} - \frac{5a^{-(2-2m)}}{4b^{2-2m}}\right) \times \frac{6a^{m+5}}{b^{1+5m}}$
$= \frac{16a^{6m}}{b^6} - \frac{25a^6}{b^{6m}}$.

9) $(16a^4 + 4a^2b^2 + b^4) \times (4a^2 - b^2) = 64a^6 - b^6$.

10) $(6a^3b^{-2} + 2a^{-3}b^2) \times (6a^3b^{-2} - 2a^{-3}b^2) = 36a^6b^{-4}$
$- 4a^{-6}b^4$.

11) $\left(1\frac{1}{3}a^{2m-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}x} - 0{,}3a^{\frac{1}{2}m}b^{1-x}\right) \times \left(1\frac{1}{3}a^{2m-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}x}\right.$
$\left.+ 0{,}3a^{\frac{1}{2}m}b^{1-x}\right) = \frac{16}{9}a^{4m-1}b^{\frac{2}{3}x} - 0{,}09a^mb^{2-2x}$.

12) $(2a^4b^{-2} - 6a^3b^{-1} - a^{-2}b^4) \times (4a^{-2}b^3 - 2a^3b^{-2}) = 8a^2b$
$- 22ab^2 - 4a^{-4}b^7 - 4a^7b^{-4} + 12a^6b^{-3}$.

13) $(a^{6m-12}b^6 + a^{4m-10}b^{2m+4} + a^{2m-8}b^{4m+2} + a^{-6}b^{6m})$
$\times (a^{2m-4}b^{-2} - a^{-2}b^{2m-4}) = a^{8m-16}b^4 - a^{-8}b^{8m-4}$.

14) $\left(\frac{2}{5}a^{m+2}b^3 + 0{,}4a^mb - 1\frac{2}{3}a^{3m-5}b^{-4}\right) \times \left(10a^{3-m}b^2\right.$
$\left.- \frac{1}{10}a^{m+2}b^3\right) = 4a^5b^5 + 4a^3b^3 - \frac{50}{3}a^{2m-2}b^{-2} - \frac{1}{25}a^{2m+4}b^6$
$- 0{,}04a^{2m+2}b^4 + \frac{1}{6}a^{4m-3}b^{-1}$.

15) $(a^{5n} + a^{4n}b^{-2} + a^{3n}b^{-4} + a^{2n}b^{-6} + a^nb^{-8} + b^{-10})$
$\times (a^n - b^{-2}) = a^{6n} - b^{-12}$.

16) $\left(32a^6 - 5\frac{1}{3}a^4b^{-2} + \frac{8}{9}a^2b^{-4} - \frac{4}{27}b^{-6}\right) \times \left(2a^2 + \frac{1}{3}b^{-2}\right)$
$= 64a^8 - \frac{4}{81}b^{-8}$.

17) $\left(\frac{1}{3}a^mb^2 - \frac{2}{3}a^{2m}b^3 + a^{1-m}b\right) \times \left(\frac{1}{3}a^mb^2 + \frac{2}{3}a^{2m}b^3\right.$
$\left.- a^{1-m}b\right) = \frac{1}{9}a^{2m}b^4 + \frac{4}{3}a^{m+1}b^4 - \frac{4}{9}a^{4m}b^6 - a^{2-2m}b^2$.

18) $$\left(2\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-3m}b^{0,3}+\frac{5}{8}a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}m}b^{\frac{4}{5}}-\frac{4}{5}a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}m}b^{0,2}\right)$$
$$\times\left(2\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-3m}b^{0,3}-\frac{5}{8}a^{\frac{2}{3}-\frac{m}{2}}b^{\frac{4}{5}}+\frac{4}{5}a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}m}b^{0,2}\right)$$
$$=\frac{25}{4}a^{1-6m}b^{0,6}-\frac{25}{64}a^{\frac{4}{3}-m}b^{\frac{8}{5}}+ab-\frac{16}{25}a^{\frac{2}{3}+m}b^{0,4}.$$

C. Division.

a. Fragen.

1. Wie wird sowohl ein Monomium als auch ein Polynomium a) durch ein Monomium, b) durch ein Polynomium dividirt?

2. Wann insbesondere besteht der Quotient aus der Summe zweier Größen und der Divisor aus der Differenz derselben zwei Größen, oder auch umgekehrt?

3. Was versteht man unter dem Ordnen der Glieder; auf welche doppelte Art kann es geschehen? — Wann ist dasselbe nothwendig, und warum?

4. Ist es gleichgiltig, auf welche von den Potenzen, wenn deren mehrere in jedem Gliede als Faktoren vorkommen, beim Ordnen das Augenmerk gerichtet wird?

5. Wann gehen die Glieder, worin Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen, jenen Gliedern, worin dieselben Dignanden positive Exponenten haben, voran? — Wann findet der umgekehrte Fall Statt?

6. Welche frühern Regeln kommen auch hier wieder in Anwendung?

7. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $(24a^6b^5 - 15a^{-2}b^3) : -3a^4b^4 = -8a^2b + 5a^2b$,

2) $(4a^5b^{-2} - 3a^{m-2}b^{4-2x}) : 3a^{-3}b^{1-x} = 1\frac{1}{3}a^8b^{-(3+x)}$
$- a^{m-1}b^{3-x}$,

3) $(a^{8m+2}b + 4a^{5m+2}b^{-2}) : a^{5m+2}b^2 = a^{3m}b^{-1} + 4ab^4$,

4) $2b^3 : 4a^2b - 3a^{m-1}b : 0{,}3a^{1-m}b^x c = \frac{1}{2}a^2b^2 - 0{,}1a^0b^{-x}c^{-1}$,

5) $(6a^3b^{2-x} \times 7a^{m-1} - 1) : \frac{1}{2}a^{3-m}b^{-(2-x)} = 12a^m b^0$
$\times 14a^{2m-4}b^{x-2} - 2a^{m-3}b^{x-2}$,

6) $3a^{5x^2}b^{(m-1)^2} : 2a^{2x^2}b^{(m-1)^2} - a^{x^{-2}}b^{-4^m} : a^{x^2}b^{4^m} = 1\frac{1}{2}a^{3x^0}b^0$
$- a^0b^{-8^m}$,

7) $4a^{m^5}b^{x^3} : 8a^{cm^5}b^{-x^3} + 8a^{2\cdot 2^m}b^{4^x} : 4a^{2^m}b^{2^x} = \frac{1}{2}a^{1-cm^5}b^{2x^3}$
$+ 2a^{2^m}b^{2^x}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit sie deren rechter Seite entspräche?

b. Aufgaben.

1) $$\left(\left(\frac{2ab}{3x} - 0{,}3x + \frac{a}{4b} - \frac{2b}{3ax} + \frac{2a^2}{5x} + \frac{2b}{3a} - \left(\frac{0{,}2ab}{x} - \frac{5}{18}x - \frac{b}{4ax}\right) + \frac{3a}{20b}\right) - \left(\frac{7ab}{15x} - \frac{x}{45} - \left(\frac{0{,}85a^2}{x} + \frac{5b}{12ax} + \frac{11b}{6a}\right) + \frac{a^2}{4x}\right)\right) : \frac{2a}{5b} = 1 + \frac{25b^2}{4a^2} + \frac{5ab}{2x}.$$

2) $$\left(\frac{5a^2m - 2b^4}{5b^3m} + \frac{10mp + 6bq}{15mq} - \frac{a^2p^x - b^3}{b^3p^x} - \frac{3q - p^{x+1}}{3p^xq}\right) : \frac{1}{pq} = p^2.$$

3) $(28a^3b^{-1} - 32a^2 - 36ab + 40b^2) : 4a^{-2}b^4 = 7a^5b^{-5} - 8a^4b^{-4} - 9a^3b^{-3} + 10a^2b^{-2}$.

4) $$\left(\frac{5}{18}a^{3m-3} - \frac{5}{12}a^{3m-5}b^x - \frac{1}{2}a^{2m-1}b^{2x} - \frac{5}{9}a^{m-1}b^{3x}\right)$$
$$: \frac{5}{6}a^{2m-3}b^{-x} = \frac{1}{3}a^mb^x - \frac{1}{2}a^{m-2}b^{2x} - \frac{3}{5}a^2b^{3x} - \frac{2}{3}a^{2-m}b^{4x}.$$

5) $$\Big(0{,}016a^mb^{1-\frac{1}{2}m} - (0{,}16ab^{-\frac{1}{2}m} - 1{,}6a^{2-m}b^{-(1+\frac{1}{2}m)}$$
$$+ 16a^{3-m}b^{\frac{1}{2}m-1}) - 160a^{4-2m}b^{\frac{1}{2}m-1}\Big) : -\frac{4}{5}a^{3-2m}b^{\frac{1}{2}m-2}$$
$$= -(0{,}02a^{3m-3}b^{3-m} - 0{,}2a^{2m-2}b^{2-m} + 2a^{m-1}b^{1-m}$$
$$- 20a^mb - 200ab).$$

6) $$1\frac{3}{7}a^{3m-2}b^2c^{-3} \times -4\frac{2}{3}a^{-(6-2m)}b^{m-3}c^2 : -1\frac{1}{3}a^{m-4}b^{m-4}c^{-3}$$
$$= 5a^{4m-4}b^3c^2.$$

7) $$3a^9b^{-2}c^{4m} : 2a^2b^3 \times 6a^6b^{-6}c^{4m-1} - (a^{m-2}b^{-6}c^m$$
$$: 4a^{3-2m}b^2c^2) \times -3a^{6-3m}b^9c^{3-m} = abc.$$

8) $$\left(\frac{3}{5}a^{m-2x}b^{2m-3x}c^5 + 0{,}2a^{2m-3x}b^{m-2x}c^{-1}\right)$$
$$: \left(2\frac{1}{2}a^{m-3x}b^{m-3x}c^2 - \frac{3}{8}a^{x-2}b^{m+x}c^5 : \frac{1}{2}a^{4x-(m+2)}b^{4x}c^3\right)$$
$$= \frac{12}{35}a^xb^mc^3 + \frac{4}{35}a^mb^xc^{-3}.$$

9) $$\left(\frac{2a^3b^2}{3a^mb^{-2}} - \frac{4a^{2m}b^3}{5a^2b^m} - \frac{5a^mb^{2m}}{6a^3b^4} + \frac{6a^4b^3}{7a^{2m}b^m}\right) : \frac{6a^4b^3}{7a^{2m}b^m}$$
$$= \frac{7}{9}a^{m-1}b^{m+1} - \frac{14}{15}a^{4m-6} - \frac{35}{36}a^{3m-7}b^{3m-7} + 1.$$

10) $\left(13\frac{1}{6}\cdot\frac{b^2x^4}{a^2c^4}+\left(1\frac{5}{6}\cdot\frac{x^3}{a^2}-0{,}4\cdot\frac{x^2}{a^3}\right)\times\left(1\frac{1}{5}\ \frac{b^5}{ac^2x}\right.\right.$
$\left.\left.-\frac{8b^2x}{c^4}\right)\right):1\frac{3}{5}\cdot\frac{b^3x}{ac^3}=1\frac{3}{8}\cdot\frac{b^2cx}{a^2}-0{,}3\cdot\frac{b^2c}{a^3}$
$-\frac{15}{16}\cdot\frac{x^3}{abc}+\frac{2x^2}{a^2bc}.$

11) $\left(\left(\frac{4a^2c-5b^{2-m}x^3}{5c}-\frac{8b^{2-m}c-3b^{1-m}x^3}{3b^{-1}c}\right):\frac{4b^2c}{3b^m}+\frac{ab^3}{8c^2x}\right.$
$\left.\times\left(\frac{16ab^{m-3}cx-25b^2}{5b^2}+\frac{5a+16b^{-2}cx}{a}\right)\right):\frac{b^m}{c}=\frac{a^2}{b^2}.$

12) $\left(a^3b^2-\frac{5}{3}a^2b\right):\left(3a^2b^3-5ab^2\right)=\frac{1}{3}ab^{-1}.$

13) $\left(\frac{a^3b^{-2}}{3x^4}+\frac{a^4b^2}{10x^2}\right):\left(\frac{a^3b^2}{4x}+\frac{5a^2b^{-2}}{6x^3}\right)=\frac{2a}{5x}.$

14) $\left(1{,}5a^{m+3}b^5-12a^{m+1}b^6-2a^{2m+3}b\right):\left(\frac{1}{2}a^mb^2-4a^{m-2}b^3\right.$
$\left.-\frac{2}{3}a^{2m}b^{-2}\right)=3a^3b^3.$

15) $\left(\frac{a^{m+1}b^2}{4x^7}-\frac{5a^mb^3}{6x^8}+\frac{3a^{m+2}b}{5x^6}\right):\left(\frac{0{,}6a^mb}{x^2}+\frac{0{,}5a^{m-1}b^2}{2x^3}\right.$
$\left.-\frac{a^{m-2}b^3}{1{,}2x^4}\right)=\frac{a^2}{x^4}.$

16) $(16a^4-9b^2):(4a^2-3b)=4a^2+3b.$

17) $\left(\frac{4}{25}a^{2m-2}b^6-0{,}04a^mb^4\right):\left(0{,}4a^{m-1}b^3+0{,}2a^{\frac{1}{2}m}b^2\right)$
$=\frac{2}{5}a^{m-1}b^3-\frac{a^{\frac{1}{2}m}b^2}{5}.$

18) $(4a^3b^2+20a^5-18a^4b):(5a^3-2a^2b)=4a^2-2ab.$

19) $\left(\frac{5}{24}a^{2m+1}b^3+\frac{1}{8}a^{2m+2}b^2-\frac{1}{2}a^{2m}b^4\right):\left(\frac{1}{2}a^{2m}b^3\right.$
$\left.+\frac{1}{6}a^{2m+1}b^2\right)=\frac{3}{4}a-b.$

20) $[13a^6b^2-(8a^5b^3-12a^4b^5+2a^7)-15a^5b^4]:(3a^2b^2-2a^3)$
$=4a^2b^3-5a^3b^2+a^4.$

21) $\left(5{,}1ab^{4m}-9\frac{3}{8}a^2b^{3m}+\frac{15}{16}a^3b^{2m}-\frac{3}{5}b^{5m}\right):-\left(\frac{3}{5}b^{2m}\right.$
$\left.-\frac{3}{2}ab^m\right)=\frac{5}{8}a^2b^m-6ab^{2m}+b^{3m}.$

22) $(x^5+y^5):(x+y)=x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4.$

23) $(32a^8-2b^8):-(b^2-2a^2)=16a^6+8a^4b^2+4a^2b^4+2b^6.$

24) $\left(\frac{1}{27}x^9-\frac{8}{125}y^6\right):\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}y^2\right)=\frac{1}{9}x^6+\frac{2}{15}x^3y^2+\frac{4}{25}y^4.$

25) $(a^{6m}b^{-6}-a^{-6}b^{6m}):(a^mb^{-1}-a^{-1}b^m)=a^{5m}b^{-5}+a^{4m-1}b^{m-4}$
$+a^{3m-2}b^{2m-3}+a^{2m-3}b^{3m-2}+a^{m-4}b^{4m-1}+a^{-5}b^{5m}.$

26) $\left(\frac{5}{2}a^2b^5+\frac{3}{16}a^3b^5-\frac{15}{4}a^4b^3+\frac{3}{2}a^5b-\frac{1}{8}ab^7-a^3b^3\right)$
$:\left(2a^3b+\frac{1}{4}ab^5-5a^2b^3\right)=\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}b^2.$

27) $\left(\frac{a^2m^3}{b^2}-a^4m^3+\frac{a^4m}{b^4}-\frac{2a^3m^3}{b}+\frac{a^3m}{b^5}-\frac{3a^6m}{b^2}-\frac{7a^5m}{b^3}\right)$
$:\left(\frac{a}{b^3}+m^2+\frac{3a^2}{b^2}\right)=\frac{a^2m}{b^2}-\frac{2a^3m}{b}-a^4m.$

28) $\left(\frac{1}{2}a^{-1}b^{8}-\frac{4}{9}a^{3}b^{6}-\frac{1}{6}a^{-3}b^{9}+\frac{4}{3}a^{5}b^{5}-1\frac{19}{54}ab^{7}\right)$
$:\left(\frac{2}{3}a^{-1}b^{4}+6a^{3}b^{2}-2ab^{3}\right)=\frac{2}{9}a^{2}b^{3}-\frac{1}{4}a^{-2}b^{5}.$

29) $(14b^{4m}c^{m}-13b^{3m}c^{2m}-5b^{5m}+4b^{2m}c^{3m}):(b^{3m}+b^{m}c^{2m}$
$-2b^{2m}c^{m})=4b^{m}c^{m}-5b^{2m}.$

30) $\left(\frac{1}{2}a^{8m-5}b^{5}-\frac{5}{24}a^{5m-3}b^{3}+\frac{1}{4}a^{3m-2}b^{2}-\frac{1}{8}a^{2m-1}b\right.$
$\left.-\frac{1}{3}a^{6m-4}b^{4}\right):\left(\frac{3}{8}a^{5m-3}b^{3}+\frac{1}{8}a^{2m-1}b-\frac{1}{4}a^{3m-2}b^{2}\right)$
$=1\frac{1}{3}a^{3m-2}b^{2}-1.$

31) $\left(\frac{28}{5}a^{5m-1}x-\frac{49}{16}a^{4m-2}x^{-2}-\frac{64}{25}a^{6m}x^{4}+\frac{9}{16}a^{2m-4}x^{-8}\right)$
$:\left(\frac{3}{4}a^{m-2}x^{-4}-1\frac{3}{5}a^{3m}x^{2}+1\frac{3}{4}a^{2m-1}x^{-1}\right)=\frac{3}{4}a^{m-2}x^{-4}$
$-\frac{7}{4}a^{2m-1}x^{-1}+\frac{8}{5}a^{3m}x^{2}.$

32) $(8b^{3}c+9a^{2}b^{4}-16b^{6}-c^{2}+4a^{4}b^{2}-12a^{3}b^{3}):(2a^{2}b-3ab^{2}$
$-4b^{3}+c)=2a^{2}b-3ab^{2}+4b^{3}-c.$

33) $\left(\frac{4}{3}abc-\left(\frac{5}{3}a^{5}b^{5}c^{2}-\frac{25}{9}a^{4}b^{4}c^{4}+\frac{25}{36}\right)+\frac{1}{4}a^{6}b^{6}\right.$
$\left.-\frac{16}{25}a^{2}b^{2}c^{2}\right):\left(\frac{1}{2}a^{3}b^{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}abc+\frac{5}{3}a^{2}b^{2}c^{2}\right)\right)$
$=\frac{1}{2}a^{3}b^{3}-1\frac{2}{3}a^{2}b^{2}c^{2}-\frac{4}{5}abc+\frac{5}{6}.$

34) $\left(12a^{2m+4}b^2+\frac{1}{2}a^{2m-4}b^6-6a^{2m+2}b^3+5a^{2m}b^4-2a^{2m-8}b^8\right.$

$\left.-4a^{2m-2}b^5-\frac{1}{2}a^{2m-12}b^{10}-2a^{2m-6}b^7\right):\left(2a^{m+2}b\right.$

$\left.-\frac{1}{2}a^{m-2}b^3-\frac{1}{4}a^{m-6}b^5-a^mb^2\right)=6a^{m+2}b+4a^{m-2}b^3$

$+2a^{m-6}b^5.$

35) $1:(1-a)=1+a+a^2+a^3+a^4+\ldots$

36) $m:(m+2)=1-\frac{2}{m}+\frac{4}{m^2}-\frac{8}{m^3}+\frac{16}{m^4}-\ldots$

37) $2a:(3a^{m-1}+b)=\frac{2}{3}a^{2-m}-\frac{2}{9}a^{3-2m}b+\frac{2}{27}a^{4-3m}b^2$

$-\frac{2}{81}a^{5-4m}b^3+\ldots$

38) $(a-b):(a+b)=1-\frac{2b}{a}+\frac{2b^2}{a^2}-\frac{2b^3}{a^3}+\frac{2b^4}{a^4}-\ldots$

39) $(a^2+x^2):(a^2-x^2)=1+\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2x^4}{a^4}+\frac{2x^6}{a^6}+\frac{2x^8}{a^8}+\ldots$

40) $\left(\frac{2}{3}a^m-\frac{1}{2}b^m\right):\left(\frac{1}{4}a^2+4b^{-2}\right)=\frac{2}{3}.4a^{m-2}$

$-\frac{2}{3}.4^3a^{m-4}b^{-2}+\frac{2}{3}.4^5a^{m-6}b^{-4}-\frac{2}{3}.4^7a^{m-8}b^{-6}+\ldots$

Aufgabe 41) bis 77) siehe am Ende den Anhang.

D. Potenzirung.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter Potenziren? — Mit welcher bereits bekannten Rechnungsart kommt dasselbe überein?

2. Ist die Qualität der Potenz jener des gegebenen Dignanden bisweilen entgegengesetzt? — Wann? — Welcher Unterschied besteht zwischen $(-a)^m$ und $-a^m$?

3. Wird das Potenziren durch ein bestimmtes Operationszeichen angedeutet? — Wie werden nun Dignand und Exponent unter sich und beide mit der Potenz verbunden? — Wie heißt der so gebildete arithmetische Satz?

4. Welchen Werth hat eine Potenz, so oft die Einheit (1) Dignand ist?

5. Welchen Werth hat eine Potenz vom 0ten Grade? — Wann erscheint ein Quotient in der Form dieser Potenz?

6. Wie verwandelt man eine Potenz mit negativem Exponenten in die ihr gleichwerthige mit positivem Exponenten, und umgekehrt?

7. Wie hat man hiebei zu verfahren, wenn eine solche Potenz a) in einem monomischen, b) in einem polynomischen Zähler oder Nenner steht, und Bruchbrüche vermieden werden sollen?

8. Wie verwandelt man sonach schnell einen Bruch mit einem negativen Exponenten in den ihm gleichwerthigen mit positivem Exponenten, und umgekehrt?

9. Wie wird ein Produkt, ein Quotient oder ein Bruch, wie eine Potenz selbst potenzirt?

10. Nach welchen Gesetzen werden Bi- oder Polynomien a) quadrirt und b) kubirt? — Wie verfährt man hiebei, wenn mit einer negativen Zahl potenzirt werden soll?

11. Wie viele Glieder hat das Quadrat, wie viele der Kubus, wenn der Dignand a) zwei= und b) dreigliederig ist?

12. Wie viele Ziffern höchstens kann das Quadrat und der Kubus a) einer zwei= und b) einer dreizifferigen Zahl bekommen? — Wie viele Ziffern wenigstens muß in jedem Falle hier das Quadrat und der Kubus haben?

13. Welche höhern Potenzen können auch nach eben diesen Regeln gebildet werden, und wie? — Soll man dabei mit dem größern oder mit dem kleinern Faktor zuerst potenziren?

14. Wie müssen die unten folgenden Aufgaben umgewandelt werden, wenn schon vor der weitern Ausarbeitung kein negativer Exponent vorhanden sein soll?

15. Welche frühern Regeln finden auch hier wieder Anwendung?

16. Wo und warum ist in den folgenden Beispielen:

1) $(-3a^3)^2+[-(3a)^2]^3=3a^6a^6$,

2) $(-4a)^3+(-a^{-2})^{2m+2}+(a^3)^{m-2}=-12a^3+a^{4m+4}+a^{3m-2}$,

3) $\left(\frac{2a^2}{a^3}\right)^3+\left(\frac{a^2b}{a^{4-8m}}\right)^3-\frac{(3a^3)^2}{5a}=\left(\frac{2}{a}\right)^3+\left(\frac{b}{a^{2-6m}}\right)^3$
$-\frac{(3a^2)^2}{5}$,

4) $(-0{,}2a^0)^3+[2(-a)^0]^3-2(-a^p)^0=-0{,}8a^0-8a^0+2a^p$,

5) $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{-4}-\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{a+b}{c}\right)^{-\frac{m}{x}}+\frac{(b+x)^{-3}}{m}=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^4$
$-\left(1\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{c}\right)^{\frac{x}{m}}+\frac{m}{(b+x)^3}$,

6) $3a^{-2}+\frac{3}{2a^{-2}}+\frac{2}{-b}=\frac{3}{a^2}+3\,.\,2a^2+2b,$

7) $\frac{3a^{-2}+b}{b^2}-\left(\frac{x}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^{-1}-\frac{m}{(a^{-2}+b^{-2})x}=\frac{3+b}{a^2+b^2}$

$+\frac{a-b}{abx}-\frac{m(a^2+b^2)}{x},$

8) $4a^{m-3}+8b^{-(1-x)}-\frac{4^{-2}c^4}{2c^{m-3}}=\frac{4a^m}{3}+\frac{8}{b^{1+x}}-\frac{c^7}{8^2\,.\,c^m},$

9) $\frac{6a^{x^2-m}}{a^{m-x^2}}-\frac{ab^{x^{-2}+4}}{5b^{2x^2-3}}+\frac{a^{-2m^3+x}b^{-x^{-2}}}{4a^{4m^3-2x}}=\frac{6a^{x^2}\,.\,a^{x^2}}{a^{m^2}}-\frac{ab^{4+3}}{5b^{2x^2+x^2}}$

$+\frac{a^{3x}}{4a^{6m^3}b^{x^2}},$

10) $\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2+\frac{(a^2-b^3)^{-3}}{c}=\frac{a^2+4b^2}{9}+\frac{a^{-6}-b^{-9}}{c^{-3}},$

11) $\left(a^{x^2}\right)^3+\left(b^{-x^3}\right)^2+\left(3a^{x^{-3}}b\right)^2=a^{x^6}+b^{x^6}+9a^{2x^{-3}}b^2,$

12) $3a^{(x^2)^3}+\left(a^4b^{(x^2)^3}\right)^2+\left(-ma^{(-x^2)^3}\right)^4=3^3a^{x^6}$

$+a^8b^{x^{12}}+m^4a^{4x^6}$

gefehlt? — Wie muß jedesmal die linke Gleichungsseite umgeändert werden, damit sie deren rechter Seite vollkommen entspricht?

b. Aufgaben.

1) $(2a)^6 - (-8a^3)^2 - [-(2a)^2]^3 - [2((-a)^{-3})^{-1}]^2 = 60a^6.$

2) $$\left(-\left(2a^{-1}\right)^3\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot (-a)^3\right)^{-2} + (-2a^{-2})^3$$
$$-\left(-\frac{1}{2} \cdot (-2a^{-\frac{1}{2}})^4\right)^3 - \left(2 \cdot \left(\left(-\frac{a}{2}\right)^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3$$
$$= 60a^{-6}.$$

3) $$\frac{(-2a)^3}{a} + \left(\frac{2}{-a^2}\right)^{-1} + \frac{1^p}{2a^{-2}} + 10 \cdot \frac{(ax-1)^{2m}}{(a^2)^{m-1}} = 2a^2.$$

4) $$\frac{(-2a^2)^2 \cdot b}{(-b^{-\frac{1}{2}})^2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a}{(1-3)^{-1}}\right)^2 - \frac{b^2}{(2a^2)^{-2}} + \left(\frac{(a^{\frac{1}{2}})^2}{-3^{-1}}\right)^2$$
$$= 3a^2.$$

5) $$\frac{5 \cdot [(b^{-1})^2]^{-2}}{(3b^{-2})^{-1}} + \left(\frac{-b^{\frac{1}{2}}}{(2-b^3)^0}\right)^4 + \frac{(-b^{0,4})^5}{2^{-1}b^{-0}} - \left(\frac{b-4b}{b^{-0,5}}\right)^2 \cdot b^{-1}$$
$$= 5b^2.$$

6) $$\frac{(-2a^0b)^2}{1 : b^{-2}} + \frac{4 \cdot -2^0}{5 \cdot (3-8)^{-1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \frac{2 \cdot [(-ab)^4]^0}{(-0,5)^3} = 16.$$

7) $$\frac{[(-a)^2]^m \cdot (-b)^{-2}}{(a^m b^{-1})^2} + \frac{[(-\frac{1}{2}a)^6]^{-1}}{[(-2^{-1}a)^3]^{-2}} - \frac{(a^{-1}-b^{-1}) \cdot (ab)^2}{a^2b - ab^2} = 3.$$

8) $$\frac{-a^{3-m} \cdot (-b)^{-4}}{2 \cdot (a^{m-3} \cdot -b^4)^{-1}} - \frac{\frac{1}{3} a^{-1} b^{m-2}}{(-b^{2-m} : a^{-1})^{-1}} + \left(\frac{2^2 a}{(2a)^6 \cdot a^{-5}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{12}.$$

9) $$\left(\frac{-a^{3-\frac{1}{2}m} b^{-2}}{3a^{\frac{1}{2}} b^{m+1}}\right)^2 \times \left(\frac{a^{1-\frac{1}{3}m}}{3a^{\frac{1}{3}} b^{2+\frac{2}{3}m}}\right)^{-3} = 3a^3.$$

10) $\left(\frac{-2a^3b^{1-4m}}{0{,}5a^{3m}b^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \times \left(\frac{2^{-3}a^{\frac{1}{3}}}{-ab^{-1}}\right)^3 \times \frac{-(-b^{2m-1})^4}{(2a^{2m-1})^{-3}} = \frac{1}{4}a.$

11) $\left(\frac{(-1\frac{1}{2}a^{-2}b^{0,3}c^{2x})^5}{5a^{m-\frac{1}{2}}b^{1\frac{1}{2}m-2}c}\right)^2 : -\left(\frac{(4.5^{\frac{1}{2}}a^{5\frac{1}{4}+\frac{1}{2}m} \times -c^{\frac{1}{2}})^2}{(3^{1,6}b^{2-\frac{3}{5}m} \times -c^{4x})^{2\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$
$= \frac{9a^2}{4b^3}.$

12) $\left(\frac{1\frac{3}{5}a^{-4}b^{3-2m}c^{\frac{1}{3}m}}{-0{,}4a^{4-m}b^{\frac{2}{3}}}\right)^{-3} \times \left(\frac{2^5c^mb^{\frac{1}{2}}}{a^{4+\frac{1}{2}m}b^{3m-3}c^2}\right)^2 : -\frac{(2a^{5-m})^3}{[(2bc^{-4})^2]^{-\frac{1}{2}}}$
$= \frac{ac^m}{a^mb}.$

13) $\left(\frac{-0{,}5b.(1+a^2b)^{-2}}{2^{-1}a^{-1}b^{\frac{1}{2}}}\right)^3 : \left(\frac{(ab^2)^{\frac{1}{2}}.-a^{\frac{1-m}{4}}}{(a^{-m}b)^{\frac{1}{4}}}\right)^{2\frac{2}{3}} \times \frac{-(1+a^2b)^{-6}}{a^{-5}b^{\frac{1}{2}}}$
$= \frac{1}{a^4}.$

14) $\left(\left(\frac{1}{1-b}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{b^{-1}-1}\right)^2\right)^4 = b^8.$

15) $(-a)^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^{-2} - \frac{(-2)^3}{(-a)^{6-4m}} + \frac{(-a)^{2m-3}}{a^{3-2m}} - \left(\frac{(-1)^{2m}}{0{,}75a^2}\right)^{-1}$
$= 7a^{4m-6}.$

16) $a^{-2} - b^{-2} + \frac{3}{a^{-2}-b^{-2}} + 3.(a^{-2}-b^{-2})^{-1} - \left(\frac{1}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{-1}$
$= \frac{6a^2b^2}{b^2-a^2}.$

17) $\left(\frac{\frac{1}{3} \times (4\frac{1}{2}-2)^2}{(1\frac{2}{3}-0{,}4) \times \frac{1}{2}}\right)^2 : \left(\frac{6.[(-3)^2-4]^{\frac{1}{2}} \times -(\frac{2}{9}-2^{-1})^{\frac{3}{2}}}{\frac{(5.2\frac{1}{2})^2}{3}-4}\right)^2$

$= -450.$

18) $\left(2a^3-\frac{1}{4}ab^2\right)^2=4a^6+\frac{1}{16}a^2b^4-a^4b^2.$

19) $\left(1\frac{2}{3}a^{m-1}b^2-0{,}6a^{3-2m}b^{-1}\right)^2=\frac{25}{9}a^{2m-2}b^4+0{,}36a^{6-4m}b^{-2}$
$-2a^{2-m}b.$

20) $\left(\frac{3a^4b^m}{5a^mb^{\frac{1}{2}}}+\frac{2a^{-3}b^{-m}}{9a^{-m}b^{\frac{1}{2}}}\right)^2=\frac{9a^8b^{2m}}{25a^{2m}b}+\frac{4a^{-6}b^{-2m}}{81a^{-2m}b}+\frac{4a}{15b}.$

21) $\left(\frac{0{,}3a^{1-m}b^{x-2}}{c^{3m-4}}-\frac{(2a^{\frac{1}{2}m+2}b^{1-x})^2}{(c^{m-\frac{4}{3}})^{-3}}\right)^2=\frac{0{,}09a^{2-2m}b^{2x-4}}{c^{6m-8}}$
$+\frac{16a^{2m+8}b^{4-4x}}{c^{8-6m}}-2{,}4a^5b^{-x}.$

22) $\left(\frac{3}{a}-\frac{a}{3}\right)^{-2}=\frac{9a^2}{81-18a^2+a^4}.$

23) $(a^2-a^{-2})^{-2}=\frac{a^4}{a^8-2a^4+1}.$

24) $\left(\frac{1}{3}a^{m-2}b^3+2a^{3-m}b^{-4}\right)^{-2}=\frac{9a^{2m+4}b^8}{a^{4m}b^{14}+12a^{2m+5}b^7+36a^{10}}.$

25) $\left(\frac{3}{4}-2a^2-1\frac{1}{3}a^3x\right)^2=\frac{9}{16}+4a^4+\frac{16}{9}a^6x^2-3a^2-2a^3x$
$+\frac{16}{3}a^5x.$

26) $\left(\frac{2a^{-3}b^2}{5cd^3}+\frac{4a^2b}{5c^{-3}d^2}-\frac{5a^3b^{-2}}{6c^3d^{-3}}\right)^2=\frac{4a^{-6}b^4}{25c^2d^6}+\frac{16a^4b^2}{25c^{-6}d^4}$
$+\frac{25a^6b^{-4}}{36c^6d^{-6}}+\frac{16a^{-1}b^3}{25c^{-2}d^5}-\frac{2}{3c^4}-\frac{4a^5b^{-1}}{3d^{-1}}.$

27) $(0{,}2a^{m-3}b^2 - 2a^{2m-1}b^{-2} + 20a^{3-2m}b^{0,5})^2 = 0{,}04a^{2m-6}b^4 + 4a^{4m-2}b^{-4} + 400a^{6-4m}b - 0{,}8a^{3m-4} + 8a^{-m}b^{2,5} - 80a^2b^{-1,5}$.

28) $\left(\frac{1}{2}a^3b^{-2} - 4ab^2 + \frac{2}{3}a^{-1}b^4 - 0{,}1a^2b^{-4}\right)^2 = \frac{1}{4}a^6b^{-4} + 16a^2b^4 + \frac{4}{9}a^{-2}b^8 + 0{,}01a^4b^{-8} - 4a^4 + \frac{2}{3}a^2b^2 - 0{,}1a^5b^{-6} - \frac{16}{3}b^6 + 0{,}8a^3b^{-2} - \frac{0{,}4a}{3}$.

29) $\left(\frac{2a^{m-2}b^3}{c^2d} - \left(\frac{a^{2-2m}b^{-2}}{4c^3d^{-2}} - \frac{3a^{2m-4}b^2}{8c^{-2}d^2}\right) - \frac{1{,}2a^4b^{-3}}{c^{-1}d^3}\right)^2 = \frac{4a^{2m-4}b^6}{c^4d^2} + \frac{a^{4-4m}b^{-4}}{16c^6d^{-4}} + \frac{9a^{4m-8}b^4}{64c^{-4}d^4} + \frac{1{,}44a^8b^{-6}}{c^{-2}d^6} - \frac{a^{-m}b}{c^5d^{-1}} + \frac{3a^{3m-6}b^5}{2d^3} - \frac{4{,}8a^{m+2}}{cd^4} - \frac{3a^{-2}}{16c} + \frac{0{,}6a^{6-2m}b^{-5}}{c^2d} - \frac{0{,}9a^{2m}b^{-1}}{c^{-3}d^5}$.

30) $\left(4a^2b^3 - \frac{1}{2}a^3b^2\right)^3 = 64a^6b^9 - \frac{1}{8}a^9b^6 - 24a^7b^8 + 3a^8b^7$.

31) $\left(2\frac{1}{2}a^{3m-2}b^{-4} - 0{,}1a^{4-6m}b^6\right)^3 = \frac{125}{8}a^{9m-6}b^{-12} - 0{,}001a^{12-18m}b^{18} - 1{,}875b^{-2} + 0{,}075a^{6-9m}b^8$.

32) $\left(\frac{2a^2b^3}{3c^{m-1}b^{2x}} + \frac{3a^{-1}b^{-2}}{4c^{2m}b^{-x}}\right)^3 = \frac{8a^6b^9}{27c^{3m-3}b^{6x}} + \frac{27a^{-3}b^{-6}}{64c^{6m}b^{-3x}} + \frac{a^3b^4}{c^{4m-2}b^{3x}} + \frac{9b^{-1}}{8c^{5m-1}}$.

33) $\left(\frac{0{,}3a}{2b^2} - \frac{4a^2}{b}\right)^{-3} = \frac{8b^6}{0{,}027a^3 - 512a^6b^3 - 2{,}16a^4b + 57{,}6a^5b^2}$.

34) $\left(1\frac{1}{2}a^{2m-1}b^m - \frac{1}{3}a^{2-4m}b^{3-m}\right)^{-3} = 1:\left(\frac{27}{8}a^{6m-3}b^{3m}\right.$
$\left. - \frac{1}{27}a^{6-12m}b^{9-3m} - \frac{9}{4}b^{m+3} + \frac{1}{2}a^{3-6m}b^{6-m}\right).$

35) $\left(4a^3b - \frac{1}{2}a^2b^2 - \frac{3}{4}ab^3\right)^3 = 64a^9b^3 + \frac{71}{8}a^6b^6 - \frac{27}{64}a^3b^9$
$- 24a^8b^4 - 33a^7b^5 + \frac{99}{16}a^5b^7 - \frac{27}{32}a^4b^8.$

36) $\left(1\frac{1}{5}a^{m-1}b - 1\frac{2}{3}a^{m-2}b^2 + 30a^{m-3}b^3\right)^3 = \frac{216}{125}a^{3m-3}b^3$
$- 364\frac{17}{27}a^{3m-6}b^6 + 27000a^{3m-9}b^9 - 7\frac{1}{5}a^{3m-4}b^4$
$+ 139\frac{3}{5}a^{3m-5}b^5 + 3490a^{3m-7}b^7 - 4500a^{3m-8}b^8.$

37) $(a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4)^3 = a^{12}b^3 + 10a^9b^6 + 10a^6b^9 + a^3b^{12}$
$+ 3a^{11}b^4 + 6a^{10}b^5 + 12a^8b^7 + 12a^7b^8 + 6a^5b^{10} + 3a^4b^{11}.$

38) $\left(2a^{m-6}b^{2-m} + \frac{1}{2}a^{m-5}b^{1-m} - \left(\frac{1}{3}a^{m-4}b^{-m}\right.\right.$
$\left.\left. - 3a^{m-3}b^{-(m+1)}\right)\right)^3 = 8a^{3m-18}b^{6-3m} + 50\frac{26}{27}a^{3m-12}b^{-3m}$
$+ 34\frac{1}{8}a^{3m-15}b^{3-3m} + 27a^{3m-9}b^{-(3m+3)} - \frac{5}{2}a^{3m-16}b^{4-3m}$
$+ 6a^{3m-17}b^{5-3m} + 18\frac{5}{12}a^{3m-14}b^{2-3m} - 9\frac{7}{12}a^{3m-13}b^{1-3m}$
$+ \frac{29}{2}a^{3m-11}b^{-(3m+1)} - 9a^{3m-10}b^{-3m-2}.$

39) $(1 - 2a)^{-4} = 1:(1 + 24a^2 + 16a^4 - 8a - 32a^3).$

40) $\left(2\frac{1}{2}a^6b^{-2}-0{,}4a^{-3}b^2\right)^4=\frac{625}{16}a^{24}b^{-8}+6a^6$
$+0{,}0256a^{-12}b^8-25a^{15}b^{-4}-0{,}64a^{-3}b^4.$

41) $(2a^4b^{-2}-a^{-1}b^2)^6=64a^{24}b^{-12}+a^{-6}b^{12}+240a^{14}b^{-4}$
$+60a^4b^4-160a^9-192a^{19}b^{-8}-12a^{-1}b^8.$

42) $\left(\frac{3a^2c^2}{4b}-\frac{4b}{1-x}\right)^6=\frac{729a^{12}c^{12}}{4096b^6}+\frac{4096b^6}{(1-x)^6}+\frac{1215a^8c^8}{16b^2(1-x)^2}$
$+\frac{2160a^4b^2c^4}{(1-x)^4}-\frac{540a^6c^6}{(1-x)^3}-\frac{729a^{10}c^{10}}{128b^4(1-x)}-\frac{4608a^2b^4c^2}{(1-x)^5}.$

E. Zahlen statt der Buchstaben zu substituiren.

a. Fragen.

1. Was erhält man, wenn in jeder von den unten folgenden Aufgaben, ehe irgend eine Reduktion vorgenommen wird, statt der Buchstaben deren Zahlenwerthe, und zwar genau nach den gegebenen Verbindungen, gesetzt werden?

2. Soll man nun nach geschehener Substitution die Potenzen sogleich, oder erst nach möglichster Vereinfachung in die entsprechenden Zahlen verwandeln?

3. Welche frühern Regeln finden hier Anwendung?

4. Wo und warum ist, wenn 2 anstatt a, —3 anstatt b, —1 anstatt c und —2 anstatt x substituirt wird, in folgenden Beispielen:

1) $\frac{a^{3x}}{b-c}+\frac{b^{4-x}}{2c^{2x}}=\frac{2^{3-2}}{-3-1}+\frac{-3^{4+2}}{(2\times-1)^{-4}},$

2) $\frac{(ab)^{4+x}}{ac^{-(3x-1)}}+\frac{3a^2}{4b^{-x}}=\frac{-6^{4-2}}{(-2)^5}+\frac{6^2}{4(-3)^{-\times-2}}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit deren rechte Seite daraus hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) Für $a=4$; $b=2$; $c=3$; $m=1$; ist

$$\frac{a^{3-2m}(-b)^2 \cdot \frac{1}{2}c^3}{a^{m-1}b^{-1}c^{3m}}=16.$$

2) Für $a=-4$; $b=\frac{1}{2}$; $c=-2\frac{2}{3}$; $d=-\frac{3}{8}$; $m=-3\frac{1}{2}$; $n=2$ ist

$$\frac{a^3b^{0,5-m}c^{-n} \times -d^{-4}}{(ab)^{2n-3}c^{\frac{1}{2}-m} \cdot (-b)^5}=9.$$

3) Für $a=-3$; $b=-2$; $m=2$ ist

$$\frac{2ab^{-3}-a^{m-2}}{a^2b+4ab^{-1}}=\frac{1}{48}.$$

4) Für $a=-3$; $b=1$; $c=-2$; $m=-1$ ist

$$\frac{2b^3c-a^2}{a^{2-m}b+3ac^2}-\frac{ac^3+1}{7a^2c^{-1}}=1.$$

5) Für $a=\frac{1}{2}$; $b=3$; $x=-2$; $m=-2$ ist

$$\left(\left(\frac{(1-x)^3a^{-m}}{2ab^2}\right)^{-4}-\frac{x^{2-m}-b}{b^{-2m}}\right)^{1-m}=27.$$

6) Für $a=-1\frac{1}{2}$; $b=0,5$; $m=3$ ist

$$\left(\frac{3\frac{1}{2}a^mb^{-4}}{3(a-b)}+\frac{8a^{1-m}b^3}{a^{-1}}-\frac{2(a-b)^{-3}}{5ab^4}-\frac{a(a-b)^{2-m}}{5b}\right)^2=900.$$

§. 12. Ueber reelle Wurzelgrößen.

A. Addition und Subtraktion.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter einer Wurzelgröße? — Wie heißen ihre Bestandtheile? — Welcher von diesen darf nicht geschrieben werden, und wann?

2. Was versteht man unter Wurzel überhaupt und unter Quadrat- und Kubikwurzel insbesondere?

3. Wann ist die Wurzel reell, wann rational, wann irrational und wann imaginär?

4. Durch welches Zeichen sind Radikand und Radikator unter sich, und durch welches sodann mit der erhaltenen Wurzel zu verbinden? — Wie heißt der durch diese drei Zahlen so gebildete arithmetische Satz?

5. Was heißt Wurzelausziehen? — Welchem Rechnungsverfahren ist es entgegengesetzt?

6. Wann hat die Wurzel dieselbe Qualität, welche der Radikand hat? — Welche Wurzeln können dagegen positiv und negativ zugleich sein? — Muß dieses Doppelzeichen vor einen jeden Faktor der Wurzel gesetzt werden, wenn der Radikand aus mehreren Faktoren besteht?

In den folgenden Aufgaben hat man solche Wurzeln nur positiv zu nehmen.

7. Wie müssen Radikator und Radikand beschaffen sein, damit man a) $+1$; b) -1 und c) ± 1 zur Wurzel erhält?

8. Wie heißen von folgender Wurzelgröße

$$\sqrt[m]{2\sqrt[3]{3\sqrt{\sqrt[x]{a}+b\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[5]{a-\sqrt[6]{b}}}}}$$

die den einzelnen Radikatoren 2, 3, 4, 5, 6, m und x entsprechenden Radikanden?

9. Wie lang muß der horizontale, und wie lang der vertikale Strich des Wurzelzeichens sein? — Wessen Stelle wird demnach durch das Wurzelzeichen zugleich vertreten?

10. Wie verwandelt man eine Wurzelgröße in eine gleichwerthige Potenzgröße? — Haben wir also nicht auch schon mit Wurzelgrößen gerechnet?

11. Wie verwandelt man umgekehrt jede Potenzgröße, es mögen die Exponenten ganze oder gebrochene Zahlen sein, in eine gleichwerthige Wurzelgröße?

12. Wie bringt man hiernach Zahlen, welche als Faktoren außerhalb des Wurzelzeichens stehen, ohne Werthsveränderung unter oder innerhalb dasselbe? — Und wie kann man umgekehrt solche Potenzen, welche als Faktoren unter dem Wurzelzeichen stehen, ohne Werthsveränderung in Wurzelcoefficienten verwandeln?

13. Wie verwandelt man Wurzelgrößen mit negativen Radikatoren in gleichwerthige Wurzelgrößen mit positiven Radikatoren, und umgekehrt?

14. Welchen Werth hat eine Wurzelgröße, wenn der Radikator a) ∞; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) 0,1 und e) 0 ist?

15. Durch welche Operationen wird der Werth einer Wurzelgröße nicht verändert? — Wie werden sonach Wurzelgrößen reducirt?

16. Wie zieht man aus jeder einfachen Potenz, wie aus einem Produkte, wie aus einem Quotienten die Wurzel aus?

17. Wie zieht man aus einem Bruche die Wurzel, wenn der Nenner irrational ist? — Kann ein jeder monomische Nenner rational gemacht werden? — Wie verfährt man hiebei?

18. Wann sind Wurzelgrößen gleichartig, gleichnamig, gleich, und wann entgegengesetzt? — Wann sind sie ungleichartig und ungleichnamig?

19. Können ungleichartige Wurzelgrößen gleichartig gemacht werden? — In jedem Falle? — Wie hat man dabei zu verfahren?

20. Wann und wie wird eine Wurzelgröße zu einer andern Wurzelgröße addirt, oder die eine von der andern subtrahirt?

21. Welche frühern Regeln kommen auch hier wieder in Anwendung?

22. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

$$1)\ \sqrt[3]{-8a}-3\sqrt[3]{(-4)^2a}+\sqrt[3]{-4}-\sqrt{-4^2}=-2\sqrt{a}-12\sqrt{a}$$
$$-\sqrt[3]{4}+4,$$

$$2)\ 3\sqrt{a^4b^{16}c^{-25}}+2\sqrt[3]{35}=3a^2b^4c^{-5}+2\left(\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}\right),$$

$$3)\ 2\sqrt{\frac{2}{9}}-5\sqrt[3]{1\frac{1}{8}a}=2.3\sqrt{2}-5.\frac{1}{2}\sqrt[3]{1a},$$

$$4)\ \sqrt[5]{a^7b^{-7}}+\sqrt[3]{a^{-8}b^{-5}c^m}-\sqrt[4]{a^{8m}b^{10}}=ab\sqrt[5]{a^2b^{-2}}$$
$$+a^{-3}bc\sqrt[3]{ab^{-8}c^{-2m}}-a^2b^2\sqrt[4]{a^mb^2},$$

$$5)\ \sqrt{a^2b^{3-m}}-4\sqrt[3]{a^2+b^2}=a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{3}{2}-\frac{m}{2}}-4\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right);$$

6) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b}}+m\sqrt[3]{a\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt[3]{b}}=(ab^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}+m[(ab)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}$
$+a^{\frac{1}{2}}+(b^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$,

7) $\sqrt[3]{6a^9b^6}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}-3\sqrt[3]{a^3-b^3}=2a^3b^2\pm\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$
$-3(a-b)$,

8) $m-\left(\sqrt{25}\pm\sqrt[3]{-27}\mp\sqrt[3]{-8}\pm\sqrt{(-3)^2}\right)$
$=m-5\mp3\pm2\mp3$,

9) $\sqrt{16a}+\sqrt{16+a^m}-4\sqrt[3]{8b-a^6}=4\sqrt{a}+4\sqrt{a^m}$
$-4(2-a^2)\sqrt[3]{b}$,

10) $3\sqrt[3]{5}-2\sqrt{10}+a-(2+\sqrt[3]{-b})=\sqrt{9+5}-\sqrt[3]{6.10}$
$+\sqrt[m]{a^m}-\sqrt[3]{2^3-b}$,

11) $a-b\sqrt{m}+(a+b)\sqrt{x}-(1-m)\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt{m(a-b)^2}$
$+\sqrt{x(a^2+b^2)}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}(m^3-1)}$,

12) $\sqrt[m]{\frac{1}{ab^2}}+a\sqrt{\frac{1}{a}}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\pm ab}\sqrt[m]{a^{m-1}b^{m-2}}$
$\pm\sqrt{a}-\frac{1}{3}a\sqrt[3]{a^2b}$,

13) $\sqrt[-3]{a^m} + 3 \times -b^{-2}\sqrt[3]{4-x^{-m}} + \sqrt[-3]{2b^{-m}} = \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^{m-3}}$
$+ \frac{3}{-b^2}\sqrt[3]{\frac{4}{-x^m}} + \sqrt[3]{2b^m}$,

14) $\sqrt[-5]{a}+\sqrt[-1]{a}+\sqrt[-\frac{1}{3}]{b}-\sqrt[0,5]{-b} = \sqrt[5]{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{a}}+b^3+b^2$,

15) $\sqrt[-4]{\frac{4}{a-2b}}+\sqrt[-3]{a+b}=\sqrt[4]{\frac{a}{4}-\frac{2b}{4}}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$,

16) $2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{-3}-(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})+6+2\sqrt{5}=5\sqrt[3]{3}-9\sqrt{5}$
$+8\sqrt{5}$,

17) $\sqrt[x^8]{b^{-x^2}}+\sqrt[x^{-8}]{b^{-x^2}}+\sqrt[-x^8]{b^{x^2}} = b^{-x^6}+b^{x^{10}}+b^{x^{-6}}$,

18) $a\left(\sqrt[m^2]{a^3}+\sqrt[x^{m-1}]{-a^2}+\sqrt[\sqrt{m}]{a^2}\right)=\sqrt[m^2]{a^{3m^2}}$
$+\sqrt[x^{m-1}]{a^{m-1}\times(-a)^2}+\sqrt[\sqrt{m}]{a^{\sqrt{m+2}}}$,

19) $\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[\frac{3}{m}]{2a^2}+\sqrt[8]{x^4}-\sqrt[x^8]{b^{x^2}}=\sqrt[12]{a^{15}}+\sqrt[3]{2a^{2m}}$
$+\sqrt{x}-\sqrt[x^4]{b^x}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $5a\sqrt{b}-6\sqrt[3]{c}+7\sqrt{b}-2\sqrt[3]{c}-2a\sqrt{b}=(3a+7)\sqrt{b}-8\sqrt[3]{c}.$

2) $3\sqrt{ab}-5\frac{1}{2}\sqrt{ab}+6\sqrt{ab}-\frac{1}{2}\sqrt{ab}+3\sqrt{b}-2\sqrt{b}=3\sqrt{ab}$
$+\sqrt{b}.$

3) $5\sqrt{a+b}-8\sqrt{a+b}+4\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}+6\sqrt{bc}-2\frac{1}{2}\sqrt{a}-3\sqrt{bc}$
$=\sqrt{a}+3\sqrt{bc}-3\sqrt{a+b}.$

4) $6\sqrt{5}-2\sqrt{3}+7\sqrt{6}-4\sqrt{5}-11\sqrt{6}+8\sqrt{3}+5\sqrt{6}-5\sqrt{3}$
$-\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$

5) $2\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b}-3\sqrt[3]{a^2b}-4\sqrt[3]{ab^2}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{ab^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b}$
$+6\frac{1}{4}\sqrt[3]{ab^2}=\frac{5}{2}\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}.$

6) $a\sqrt[m]{b}-5b\sqrt[x]{a}+6a\sqrt[m]{b}-2b\sqrt[x]{a}-2a\sqrt[m]{b}+8b\sqrt[x]{a}$
$=5a\sqrt[m]{b}+b\sqrt[x]{a}.$

7) $4\sqrt[m]{a^2b^3}-5\sqrt[m]{ab^3}+2\sqrt[m]{a^2b^2}+6\sqrt[m]{ab^3}-2\sqrt[m]{a^2b^2}$
$-3\sqrt[m]{a^2b^3}=\sqrt[m]{a^2b^3}+\sqrt[m]{ab^3}.$

8) $1\frac{1}{2}a\sqrt[4]{5}-(6\sqrt[3]{3b}-b\sqrt[4]{5}+0{,}2\sqrt[3]{3b}-\frac{1}{2}a\sqrt[4]{5}-0{,}8\sqrt[3]{3b})$

$=(2a+b)\sqrt[4]{5}-5{,}4\sqrt[3]{3b}.$

9) $4\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}+5\sqrt[m]{\frac{ab^3}{cd}}-\left(2a\sqrt[m]{\frac{ab^3}{cd}}-5\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}\right.$

$\left.+b\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}\right)=(9-b)\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}+(5-2a)\sqrt[m]{\frac{ab^3}{cd}}.$

10) $5\sqrt[6]{a-x}+2\sqrt[6]{b^5}-(3\sqrt[6]{b^{-5}}+5\sqrt[6]{b^5}+2\sqrt[6]{a-x})$

$+3b^2\sqrt[6]{a-x}=(3+3b^2)\sqrt[6]{a-x}-3\sqrt[6]{b^5}-3\sqrt[6]{b^{-5}}.$

11) $\frac{2}{3}a\sqrt{9a}+6a\sqrt{\frac{1}{4}a}+3\sqrt{a^3}-5a^2\sqrt{\frac{1}{a}}+\frac{2}{a^2}\sqrt{a^7}$

$-1\frac{1}{2}a^{2-m}\sqrt{\frac{16}{9}a^{2m-1}}=3a\sqrt{a}.$

12) $2\sqrt{\frac{ab}{4}}-5\frac{1}{3}a^{-1}\sqrt{\frac{a^3b}{16}}+\frac{1}{2b}\sqrt{ab^3}+3a\sqrt{\frac{b}{a}}$

$-2b\sqrt{\frac{a}{9b}}=2\frac{1}{2}\sqrt{ab}.$

13) $5\sqrt[3]{a^2b^5}+2b^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}+4a^{-2}b\sqrt[3]{a^8b^2}-6ab\sqrt[3]{a^{-1}b^2}$

$+\frac{3}{2}ab^2\sqrt[3]{\frac{-8}{ab}}=2b\sqrt[3]{a^2b^2}.$

14) $2b^{2m}\sqrt[3]{a^2b^{1-3m}}+b^{1-m}\sqrt[3]{27a^2b^{6m-2}}+8a^{m+1}\sqrt[3]{\frac{b^{3m+1}}{8a^{3m+1}}}$

$-\frac{1}{2}ab^{2m-1}\sqrt[3]{\frac{1000b^{4-3m}}{a}}=4b^m\sqrt[3]{a^2b}.$

15) $\frac{1}{2}b^2\sqrt{\left(\frac{4}{b}\right)^3}+\frac{3a}{b^3}\sqrt[3]{-a^{-3}b^{10}}+2b^{2-\frac{1}{5}m}\sqrt{b^{-3+0,4m}}$

$+5b^{1-\frac{1}{2}m}\sqrt[3]{b^{1\frac{1}{2}m-2}}=6\sqrt{b}+2\sqrt[3]{b}.$

16) $3\sqrt{12}-5\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{3}+4\sqrt{\frac{1}{12}}-\sqrt{27}+2\sqrt{\frac{3}{4}}$

$=\frac{1}{3}\sqrt{3}.$

17) $3\sqrt{27}-2\sqrt{147}-4\sqrt{\frac{6}{8}}+3\sqrt{75}-\frac{1}{2}\sqrt{48}=6\sqrt{3}.$

18) $3\frac{1}{2}\sqrt{8}-\sqrt{4\frac{1}{2}}-8\sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{13}{9}}$

$=4\sqrt{2}.$

19) $10\sqrt{0,2}+5\sqrt{\frac{1}{20}}+7\frac{1}{2}\sqrt{1,8}+2\frac{1}{2}\sqrt{0,05}-2\frac{1}{2}\sqrt{3\frac{1}{5}}$

$=5\frac{1}{4}\sqrt{5}.$

20) $\sqrt[3]{32}+1\frac{1}{5}\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{-2048}+\sqrt[3]{-500}+\sqrt[3]{-0,864}$

$=8\sqrt[3]{4}.$

21) $\sqrt[3]{\frac{4}{144}}+\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{3}{4}}+\sqrt[3]{\frac{0,4}{48,6}}+\frac{1}{9}\sqrt[3]{-6}=\sqrt[3]{6}.$

22) $0,7\sqrt[3]{80}+3\sqrt[3]{0,01}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-10000}-\sqrt[3]{\frac{6}{25}-\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{\frac{2}{25}}$
$=7\sqrt[3]{10}.$

23) $2\sqrt{24}+4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+12\sqrt{\frac{2}{3}}-24\sqrt[3]{\frac{1}{54}}-8\sqrt[3]{-0,0625}$
$-1\frac{1}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}=7\sqrt{6}.$

24) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+2\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{27}+6\sqrt[3]{\frac{1}{81}}+12\sqrt[6]{\frac{64}{27}}$
$=\sqrt[3]{9}+9\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

25) $\sqrt[4]{648}-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}+10\sqrt{0,004}+\sqrt{1\frac{3}{5}}+\frac{3}{2}\sqrt[12]{512}-\sqrt{9-6,5}$
$=4\sqrt[4]{8}+\frac{1}{10}\sqrt{10}.$

26) $\sqrt{50}+\sqrt[-2]{\frac{1}{2}}-4\sqrt[-2]{2}+\sqrt[-3]{18^{-1\frac{1}{2}}}+6\sqrt{\frac{1}{8}}=10\sqrt{2}.$

27) $\sqrt{3\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{64}}}+\sqrt[0,3]{6}-\sqrt[3]{\left(\frac{(-4)^0}{6}\right)^2}-\sqrt[0,2]{6\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}$
$+9\sqrt[-4]{\frac{9}{4}}=4\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{6}.$

28) $3\sqrt{4a^3b}+7a\sqrt{ab}-3\sqrt{a}+5a\sqrt{\frac{1}{a}}=13a\sqrt{ab}+2\sqrt{a}.$

29) $3\sqrt[6]{27}-4\sqrt{\frac{6}{8}}+3\sqrt{75}-2\sqrt{147}=2\sqrt{3}.$

30) $\sqrt[3]{40}-5\sqrt[3]{\frac{1}{25}}+6\sqrt[3]{-0,625}+\sqrt[3]{\frac{2}{0,4}}+20\sqrt[3]{\frac{0,05}{10}}$
$+2\sqrt[3]{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)}=0.$

31) $3\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b^{3+m}}-2\frac{3}{4}\cdot\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{b^{2m}}{a^{-5}b^m}}+8a\sqrt[3]{\frac{b^m}{a}}-4\sqrt[3]{8a^2b^m}$
$=\frac{3}{4}b\sqrt[3]{a^2b^m}.$

32) $\sqrt{1-\frac{1}{2}x}+3\sqrt{4-2x}-\sqrt{16-8x}+8\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}x}$
$-\frac{1}{x}\sqrt{-(2x^3-4x^2)}=2\frac{1}{2}\sqrt{4-2x}.$

33) $3a^2\sqrt{\frac{a^{-1}-a^{-2}x}{a+x}}-3(ax-x^2)\sqrt{\frac{1}{a^2-x^2}}-2a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}$
$+4x\sqrt{\frac{a^4-x^4}{(a^2+x^2)(a+x)^2}}=\sqrt{a^2-x^2}.$

34) $\sqrt[m]{(ab^{\frac{1}{3}})^{-3}}+\frac{1}{ab}\sqrt[m]{a^{m-3}b^{m-1}}+\frac{a^2}{b}\sqrt[m]{\frac{b^{2m-1}}{a^{3m+3}}}$

$+(2a-b)\sqrt[-m]{\frac{a^3}{(a^m b)^{-1}}}=4\sqrt[m]{\frac{1}{a^3 b}}.$

35) $\sqrt[5]{a^{12}b^{-2}}+\frac{3b}{a}\sqrt[10]{a^{34}b^{-14}}-\sqrt{a^{4,8}b^{-0,8}}+\frac{a^3}{b}\sqrt[5]{\left(\frac{b}{a}\right)^3}$

$+3\sqrt[5]{\frac{a}{b}\sqrt[3]{ab^8\sqrt{a^4b^8}}}=\frac{4a^2+3b}{b}\sqrt[5]{a^2b^3}.$

36) $b\sqrt{\frac{1}{a-b}}+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}}-a\sqrt{\frac{c}{ac-bc}}-\frac{1}{a}\sqrt{a^2b\left(\frac{a}{b}-1\right)}$

$+\sqrt{a^3-a^2b}-b\sqrt{-\left(\frac{4}{b}-\frac{4a}{b^2}\right)}=(a-3)\sqrt{a-b}.$

37) $\sqrt[m]{a^{2m+2}b^{m+4}}+\sqrt[m]{a^{mx+2}b^{m^2+4}}+\sqrt[x]{\left(a^{x+\frac{x}{m}}\right)^2\left(b^x\right)^{\frac{4}{m}+1}}$

$+b^{2m}\sqrt[-m]{\frac{a^{1-mx}}{a^3b^{4-m^2}}}=(2a^xb^m+2a^2b)\sqrt[m]{a^2b^4}.$

38) $\sqrt[6]{a^{10}b^9c^8}+abc\sqrt[-6]{a^2b^3c^4}+\frac{4a^2c^m}{bc^2}\sqrt[6]{a^{-2}b^{15}c^{20-6m}}$

$-6\sqrt[3]{a^2b^2c\sqrt{b^{-1}}}=(5abc-5)\sqrt[6]{a^4b^3c^2}.$

39) $\sqrt[3]{8a^8-8a^6x^2}+a\sqrt[3]{a^3x^2-a^5}+\sqrt[3]{x^{-1}-\frac{a^2}{x^3}}+\frac{a^2}{x^2}\sqrt[3]{a^{-4}x^3-\frac{x^5}{a^6}}$

$-\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{a^{13}+a^{12}x}{(x-a)^2}}=\frac{a^2x}{x-a}\sqrt[3]{a^2-x^2}.$

40) $3a^2b^{-4}\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^{3m-4}}}-4ab^{-3}\sqrt[3]{a^8b^{1-3m}}+\frac{a^2}{b^{m+4}}\sqrt[3]{a^5b^4}=0.$

B. Multiplikation.

a. Fragen.

1. Können ungleichnamige Wurzelgrößen jedesmal gleichnamig gemacht werden? — Wie verfährt man dabei?

2. An welche frühere Operation erinnert das Gleichnamigmachen der Wurzelgrößen?

3. Soll hiebei das Potenziren bloß angezeigt, oder wirklich vollzogen werden, namentlich wenn Polynomien zu potenziren sind?

4. Welche Wurzelgröße darf (und soll im erforderlichen Falle) als Faktor zu jeder Zahl gesetzt oder als hinzugesetzt gedacht werden?

5. Wie wird eine Wurzelgröße durch eine ihr gleichnamige multiplicirt?

6. Wie wird eine Wurzelgröße durch eine ihr ungleichnamige Wurzelgröße, wie durch eine Zahl oder Potenz, und umgekehrt, multiplicirt?

7. Müssen sämmtliche Wurzelgrößen des einen polynomischen Faktors sowohl unter sich als auch mit denen des andern Faktors gleichnamig sein, bevor multiplicirt wird?

8. Wann verschwindet in einem Gliede des Produktes eine Wurzelgröße als solche?

9. Welche frühern Regeln kommen auch hier wieder in Anwendung?

10. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $\sqrt[3]{a} \times 2a + a\sqrt[4]{b} \times c\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2a^2} + ac\sqrt[12]{b^2}$,

2) $5\sqrt[m]{a^{2x-1}} \times b\sqrt[4]{4a^3} = 5b\sqrt[4m]{4a^{(8x-4)}.3m}$,

3) $a\sqrt{b}\,.\,b\sqrt{x}+\sqrt[2m]{a^3\sqrt{b}}\times x\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{a^2b}\times\sqrt[-m]{b}=ab\sqrt{bx}$
$+x\sqrt[2m]{a^5\sqrt{a^2b}}-\sqrt[-m]{a^2}$,

4) $\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}\times\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt[6]{(a^2+\sqrt[3]{b^2})\,(a^3-\sqrt{b^3})}$,

5) $\sqrt[6]{2-3\sqrt{3}}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2\sqrt[6]{2}-3\sqrt[6]{27.2}}$,

6) $(1+\sqrt{x})\times\sqrt{1-\sqrt{x}}\begin{cases}=\sqrt{(1-x)\,(1+\sqrt{x})},\\ =\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x^2}},\end{cases}$

7) $\sqrt[3]{a^{m^2}}\times\sqrt[m^3]{a^5b^{x^4}}+\sqrt[m^2]{a^{x^3}b}\times\sqrt[m]{a^xb^m}=\sqrt[3m^3]{a^{m^5+15}b^{x^{12}}}$
$+\sqrt[m^2]{a^{x^3+mx}b^{2m+1}}$,

8) $\sqrt[3^x]{a^x}\times\sqrt[x^3]{a^3}+\sqrt[\sqrt{2}]{a^6b^{\sqrt{3}}}\times\sqrt[\sqrt{3}]{ab^{\sqrt{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[3^x.x^3]{a^{x^4}\,.\,a^{9^x}}$
$+\sqrt[\sqrt[4]{6}]{a^{6\sqrt{3}}b^3\,.\,a^{\sqrt{2}}b}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit sie deren rechter Seite entspräche?

b. Aufgaben.

1) $2a\sqrt{a} \times 3\sqrt{b} \times a\sqrt{ac} = 6a^3\sqrt{bc}$.

2) $1\frac{2}{3}\sqrt{3ab} \times 6\sqrt{\frac{ac}{b}} \times 2b\sqrt{2c} = 20abc\sqrt{6}$.

3) $4\sqrt{6} \times \frac{2}{3}\sqrt{2} \times 5\sqrt{1\frac{1}{2}} \times \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{10}$.

4) $5\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{2}{3}} \times -4\sqrt{0{,}8} \times -0{,}1\sqrt{\frac{3}{4}} \times 2\sqrt{0{,}5} = \frac{11}{5}\sqrt{2}$.

5) $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{8}} \times 0{,}4\sqrt{0{,}2} \times 6\sqrt{1\frac{4}{5}} \times 3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{3}{5}$.

6) $3a\sqrt{2b} \times 5ab\sqrt{2b} = 30a^2b^2$.

7) $4a\sqrt{2a^3b} \times \frac{1}{3}\sqrt{5ab^5} \times 1\frac{1}{5}\sqrt{0{,}5ab} \times \sqrt{5a^5b^5} = 8a^6b^6$.

8) $a\sqrt[3]{a^4b^5} \times b\sqrt[3]{a^5b^8} \times \sqrt[3]{a^{-7}b^{-10}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{ab^2}} = ab\sqrt[3]{ab}$.

9) $2\sqrt[3]{4} \times 4\sqrt[3]{5} \times 2\frac{1}{2}\sqrt[3]{0{,}1} = 20\sqrt[3]{2}$.

10) $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3}\sqrt[3]{-4\frac{1}{2}} \times 6\sqrt[3]{1\frac{1}{4}} \times -4\sqrt[3]{0{,}4} = 8\sqrt[3]{9}$.

11) $5 \times -2\sqrt[4]{\frac{3}{5}} \times 1\frac{1}{6}\sqrt[4]{3\frac{1}{3}} \times -1\frac{1}{5}\sqrt[4]{\frac{3}{4}} = 7\sqrt[4]{24}.$

12) $\sqrt[m]{a^{6-m}b^3} \times b\sqrt[m]{a^{2m-1}b^{4-m}} \times \frac{1}{a}\sqrt[m]{\frac{a^4}{a^m b^2}} \times \sqrt[m]{a^{1+3m}b^{2-2m}}$

$= \frac{a^2}{b^2}\sqrt[m]{a^{10}b^7}.$

13) $2\sqrt{3} \times 4\sqrt[4]{6} \times 1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3}\sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{27}.$

14) $0{,}6\sqrt[4]{4} \times 4\sqrt[4]{\frac{1}{375}} \times -\frac{7}{3}\sqrt{0{,}2} \times -4\frac{2}{7}\sqrt[4]{1\frac{2}{3}} = 1\frac{3}{5}\sqrt{6}.$

15) $5\sqrt[3]{2\frac{1}{2}} \times 8\sqrt{1\frac{1}{2}} \times 0{,}4\sqrt[6]{4\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{1\frac{1}{5}} = 24\sqrt[6]{12}.$

16) $\frac{3a}{5b}\sqrt[3]{\frac{m^2}{a-x}} \times \frac{4b}{5a}\sqrt{\frac{a-x}{2m^3}} = \frac{12}{25}\sqrt[6]{\frac{a-x}{8m^5}}.$

17) $a\sqrt[4]{2a^3b} \times 3\sqrt{ab^3} \times \sqrt[4]{a^2b^5} \times \frac{b}{a}\sqrt{a^3b^{-1}} = 3a^3b^3\sqrt[4]{2ab^2}.$

18) $ab\sqrt[3]{a^5b^{-4}} \times -\sqrt{a^{-3}b} \times \sqrt[4]{a^{10}b^9} \times b\sqrt[3]{-ab^2} = a^4b^4\sqrt[12]{b}.$

19) $\sqrt[4]{a^6b^9} \times \sqrt[3]{a^7b^8} \times \sqrt[-2]{a^{-3}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \times \sqrt[-4]{a^7b^{-10}} = a^3b^7\sqrt[4]{a^3b}.$

20) $a\sqrt[m]{a^3b^4} \times \sqrt{ab^5} \times \sqrt[3]{a^8b^{-4}} \times \sqrt[m]{a^{-3}b^{-4}} = a^4b\sqrt[6]{ab}.$

21) $a^2\sqrt[m]{a^5b^2}\times b\sqrt[3]{a^5b^{-1}}\times\sqrt[m]{a^6b^7}\times\sqrt[3]{a^4b^{13}}=a^5b^5\sqrt[m]{a^{11}b^9}.$

22) $3\sqrt[2m]{a^5b^6}\times\sqrt{a^3b}\times 2\sqrt[m]{ab^6}\times\sqrt[3]{a^8b^5}=6a^4b^2\sqrt[6m]{a^{m+21}b^{m+54}}.$

23) $\sqrt[m]{a^{3-2m}b^{1+m}}\times\sqrt[x]{a^4b^2}\times\sqrt[-m]{a^2b^8}\times\sqrt[4]{a^8b^{-4}}\times\sqrt[2m]{a^{-2}b^{14}}$

$=\sqrt[x]{a^4b^2}.$

24) $6\sqrt{1-x}\times\sqrt[4]{\frac{1}{1-x}}\times 0{,}5\sqrt[3]{4(1-x)^2}\times\sqrt[-2]{2(1-x)}$

$=3\sqrt[12]{4(1-x)^5}.$

25) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2a}{(a-x)^2}}\times\sqrt[6]{8a^2(a-x)^2}\times\sqrt{\frac{a^3}{a-x}}\times\sqrt[-3]{\frac{a^2}{2(a-x)}}$

$=\frac{a}{a-x}\sqrt[6]{2a^3(a-x)^3}.$

26) $\sqrt[5]{2\sqrt{3}}\times\sqrt[5]{4\sqrt[4]{1\frac{1}{2}}}\times\sqrt[5]{\frac{2}{3}\sqrt[4]{6}}\times\sqrt[5]{4\sqrt{0{,}5}}=2\sqrt[10]{2}.$

27) $\sqrt[m]{a\sqrt[3]{b^2}}\times\sqrt[m]{a^3\sqrt{b}}\times\sqrt[m]{\frac{1}{a}\sqrt{ab}}\times\sqrt[m]{b\sqrt[3]{a^2b^5}}$

$=\sqrt[6m]{a^{25}b^{26}}.$

28) $\left(2\sqrt{2}-3\frac{1}{2}\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{2\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{8}}\right)\times 8\sqrt{10}$

$=80+24\sqrt{5}-28\sqrt{2}.$

29) $\left(0{,}6\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}-4\sqrt[3]{\frac{3}{4}}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{0{,}1}+2\sqrt[3]{10}\right)\times5\sqrt[3]{-2\frac{2}{5}}$

$=4\sqrt[3]{225}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{30}-20\sqrt[3]{3}-1\frac{1}{5}\sqrt[3]{100}.$

30) $\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}-6\sqrt{5}+3\sqrt[-2]{6}\right)\times2\sqrt[3]{6}=4\sqrt[6]{972}-\sqrt[3]{24}$

$-12\sqrt[6]{4500}+\sqrt[6]{7776}.$

31) $(2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[4]{2}+5\sqrt[6]{2})\times6\sqrt[6]{\frac{1}{2}}=12\sqrt[3]{2}+18\sqrt[6]{2}$

$-24\sqrt[12]{2}+30.$

32) $\left(2\sqrt{ab}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{a^3b^2}-8\sqrt[8]{ab^6}+a^3b\right)\times\frac{1}{2}\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{a^3b^3}$

$-\frac{a}{8}\sqrt[4]{b^3}-4b\sqrt[8]{a^3}+\frac{1}{2}a^3b\sqrt[4]{ab}.$

33) $(a\sqrt[3]{a^2b}-b\sqrt[m]{a^3b^5}+\sqrt[2m]{a^{-4}b^6})\times a\sqrt[4]{a^2b^3}=a^3b\sqrt[12]{a^2b}$

$-ab\sqrt[4m]{a^{2m+12}b^{3m+20}}+a\sqrt[4m]{a^{2m-8}b^{3m+12}}.$

34) $\left(6b\sqrt{a+b}-2\sqrt[5]{\frac{b^{3,5}}{(a+b)^4}}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a+b}\right)^2}\right)$

$\times\frac{1}{3}\sqrt[10]{\frac{(a+b)^3}{b^2}}=2\sqrt[5]{b^4(a+b)^4}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$

$+\frac{1}{3}\sqrt[30]{\frac{b^{14}}{(a+b)^{11}}}.$

35) $(2\sqrt[3]{a^2b^4}-\sqrt{a^3b}-b\sqrt[3]{a^2\sqrt{ab^{-2}}}+\sqrt[6]{a^4b^3})\times\sqrt[6]{a^2b^3}$

$=ab(2\sqrt[6]{b^5}-\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{ab}+1).$

36) $(4+3\sqrt{2})\times(3-2\sqrt{2})=\sqrt{2}.$

37) $(2\sqrt{6}+4\sqrt{3})\times(6-4\sqrt{2})=8\sqrt{3}-4\sqrt{6}.$

38) $\left(1\frac{2}{3}\sqrt{3}-3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\times\left(1\frac{2}{3}\sqrt{3}+3\sqrt{\frac{2}{3}}=2\frac{1}{3}.\right.$

39) $-0{,}2\sqrt{-2\left(\sqrt{11}-6\right)}\times-40\sqrt{12+2\sqrt{11}}=80.$

40) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{6})\times(2\sqrt{5}-3\sqrt{6})\times(2\sqrt{3}-4\sqrt{10})$

$=188\sqrt{3}-6\sqrt{10}.$

41) $(2\sqrt{30}-3\sqrt{5}+5\sqrt{3})\times(\sqrt{8}+\sqrt{3}-\sqrt{5})=30.$

42) $(2\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{12})\times\left(\frac{1}{3}\sqrt{30}-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=8.$

43) $(3\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{0{,}3}+\sqrt{0{,}6})\times(\sqrt{0{,}6}+\sqrt{0{,}3}-\sqrt{0{,}9})=1\frac{1}{5}.$

44) $\left(3\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{13}-\frac{3}{8}\sqrt{32\frac{1}{2}}\right)\times\left(\frac{3}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{13}\right.$

$\left.+\sqrt{8}\right)=13+2\frac{7}{64}\sqrt{26}.$

45) $\left(2\sqrt{3}-4\sqrt{\frac{1}{2}}+1\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)\times\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{\frac{1}{2}}-1\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$
$=10\frac{2}{3}\sqrt{3}-6\frac{2}{3}.$

46) $\left(1\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{2}{5}\sqrt{10}-0{,}1\sqrt{20}\right)\times-\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}-0{,}4\sqrt{10}\right.$
$\left.-0{,}2\sqrt{5}\right)=\frac{3}{5}\sqrt{30}-12{,}1.$

47) $\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)\times\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{8}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
$=8\sqrt{3}-21\frac{1}{2}.$

48) $(3\sqrt{8}-4\sqrt{5}+6\sqrt{3})\times(4\sqrt{2}+3\sqrt{20}-5\sqrt{12})$
$=76\sqrt{15}-36\sqrt{6}+20\sqrt{10}-252.$

49) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}\right)\times(\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{3})$
$=-\left(2\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3}+2\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$

50) $(2\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{10})\times(5\sqrt[3]{100}-6\sqrt[3]{2})=20\sqrt[3]{50}-174$
$+18\sqrt[3]{20}.$

51) $\left(1\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)\times\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{9}\right)=\frac{8}{9}\sqrt[3]{2}$
$-12\sqrt[3]{3}.$

52) $\left(2\sqrt[3]{150}-4\sqrt[3]{\frac{45}{2}}\right)\times\left(10\sqrt[3]{1\frac{1}{5}}+12\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\right)$
$=20\sqrt[3]{180}-24\sqrt[3]{150}.$

53) $\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}\right)\times\left(\sqrt{8}+\sqrt[4]{\frac{3}{8}}\right)=8-\frac{1}{4}\sqrt{6}.$

54) $\left(3\sqrt[3]{2}-4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\times(3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{32})=\sqrt[3]{4}.$

55) $(3\sqrt{6}-2\sqrt[3]{6})\times\left(4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=12\sqrt[6]{54}+2\sqrt[6]{972}$
$-8\sqrt[3]{3}-9\sqrt{2}.$

56) $\left(4\sqrt{2}-2\sqrt[3]{4}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}\right)\times(5\sqrt{2}-\sqrt[3]{4})=40+4\sqrt[3]{2}$
$-5\sqrt[4]{2}-28\sqrt[6]{2}+\sqrt[12]{32}.$

57) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{24}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[6]{54}+\sqrt[3]{9})\times(\sqrt[6]{2}-\sqrt[6]{3})=\sqrt[6]{32}$
$-\sqrt[6]{243}.$

58) $(6\sqrt{6}+3\sqrt[4]{24}+\sqrt{9})\times(\sqrt[4]{216}-\sqrt{3})=36\sqrt[4]{6}-3\sqrt{3}.$

59) $(\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}}-\sqrt[3]{3\sqrt{5}-8})\times2\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}\sqrt{5}}=2\sqrt[3]{19}.$

60) $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)\times\sqrt[3]{1-2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{7}.$

61) $\left(a+\frac{2}{a}\sqrt{ab}\right)\times\left(a-2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=a^2-\frac{4b}{a}.$

62) $(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})\times(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3})=a^3-b^3.$

63) $(a\sqrt{b}+b\sqrt[4]{a^5b^{-1}})\times(a\sqrt{b}-a\sqrt[4]{ab^3})=a^2b\,(1-\sqrt{ab}).$

64) $(a\sqrt[4]{b^3}+b\sqrt[4]{a^3})\times(b\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^4b^3})=ab^2\sqrt{a}-a^2b\sqrt{b}.$

65) $\left(\sqrt{7a^3b}-a\sqrt{4ab}+a^2\sqrt{\frac{3b}{a}}\right)\times\left(a\sqrt{7ab}+2a\sqrt{ab}\right.$
$\left.-a^2b\sqrt{\frac{3}{ab}}\right)=4a^3b\sqrt{3}.$

66) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{a^3}-b\sqrt{b}\right)\times(a\sqrt{ab^{-3}}-a\sqrt{a}+\sqrt{b^3})$
$=\frac{a^3}{b^3}-a^3-b^3+2ab\sqrt{ab}.$

67) $\sqrt[m]{2a^2-3\sqrt{b}}\times\sqrt[m]{2a^2+3\sqrt{b}}=\sqrt[m]{4a^4-9b}.$

68) $\sqrt[6]{a^3b(7+4\sqrt{3})}\times a\sqrt[3]{a\sqrt{3ab}-2a\sqrt{ab}}=a^2\sqrt[3]{b}.$

69) $\left(4\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt[3]{4}\right)\times6\sqrt[3]{8-2\sqrt{2}}=24\sqrt[6]{9-4\sqrt{2}}$
$-24\sqrt[3]{4-\sqrt{2}}.$

70) $(6\sqrt{3}-4\sqrt{5})\times 8\sqrt[4]{2\sqrt{2}+4\sqrt{3}}=48\sqrt[4]{18\sqrt{2}+36\sqrt{3}}$
$-32\sqrt[4]{50\sqrt{2}+100\sqrt{3}}.$

71) $(2\sqrt{6}+3\sqrt{10})\times 5\sqrt[4]{6-3\sqrt{2}}=10\sqrt[4]{108.(3-2\sqrt{2})}$
$+15\sqrt{30.(2-\sqrt{2})}.$

72) $(p^8+q^8)(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q)(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})$
$\times(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})=p^{16}-q^{16}.$

C. Division.

a. Fragen.

1. Wann und wie wird eine Wurzelgröße a) durch eine ganze Zahl, und umgekehrt, b) durch eine andere Wurzelgröße dividirt?

2. Wie wird ein Polynomium a) bei gleichnamigen und b) bei ungleichnamigen Wurzelgrößen durch eine monomische Wurzelgröße dividirt? — Müssen im letztern Falle sämmtliche Wurzelgrößen gleichnamig gemacht werden?

3. Wie verfährt man dann, wenn sowohl Dividend als auch Divisor mehrgliederig sind?

4. Werden polynomische Divisoren oder Nenner auf dieselbe Art, wie die monomischen, rational gemacht? — Auf welche Weise geschieht es also? — In welchen Fällen führt dieses Verfahren erst nach mehrmaliger Wiederholung, und wann gar nicht zu dem beabsichtigten Ziele?

5. Ist dieses Rationalmachen mit dem Dividiren selbst gleichbedeutend, also dieses zugleich mit jenem geschehen?

6. Kann man, anstatt den Divisor rational zu machen, jedesmal auch auf die gewöhnliche Art dividiren? — Was würde man z. B. in Aufgabe Nro. 28 auf diese Weise erhalten?

7. Welche frühern Regeln können auch hier wieder Anwendung finden?

8. Wo und warum ist in den folgenden Beispielen:

1) $15\sqrt[3]{9}:3-6\sqrt[4]{24}:3\sqrt{6}=5\sqrt[3]{3}-2\sqrt[4]{4}$,

2) $12:3\sqrt{2}+36\sqrt{15}:(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})=4\sqrt{2}+18\sqrt{5}$
$-12\sqrt{3}$,

3) $\sqrt[6]{\sqrt{21}+3\sqrt{6}}:\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{\sqrt{7}+3\sqrt{2}}$,

4) $$\frac{42}{3+5\sqrt{2}}+\frac{a}{-\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{42\times3-5\sqrt{2}}{9-25.2}+\frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b},$$

5) $$3:(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2+3-5},$$

6) $$5:(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})=\frac{a(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-\sqrt{c^2}},$$

7) $$5:(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})=\frac{5.(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2},$$

8) $$\frac{m}{-2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{b}}+\frac{1}{-\sqrt{a}+\sqrt[-2]{b}}=\frac{m(2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{b})}{4a-\frac{1}{4}\sqrt{b}}$$
$$+\frac{\sqrt{a}+\sqrt[-2]{b}}{-a+b},$$

9) $\dfrac{1}{\sqrt{a-\sqrt{b}}}+\dfrac{m}{\sqrt{2\sqrt{a}-\sqrt{x}}}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-b}}+\sqrt{\dfrac{m(2\sqrt{a}+\sqrt{x})}{4a-x}}$,

10) $\sqrt[a^m]{b}:\sqrt[(-b)^m]{a}+\sqrt[2^m]{a^3}:\sqrt[3^m]{a^2}=\sqrt[(ab)^m]{a^m b^m}+\sqrt[6^m]{a^{3^{m+1}}\cdot a^{2^{-(m+1)}}}$,

11) $\sqrt[\sqrt{x}]{a^x b^{\sqrt[3]{x^2}}}:\sqrt[\sqrt[3]{x}]{a^{\sqrt{x}}+b^{\sqrt[4]{x}}}=\sqrt[\sqrt[6]{x^5}]{\dfrac{a^{x\sqrt[3]{x}}\,b^x}{a^x+b^{\sqrt[4]{x^3}}}}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $2a\sqrt{b}:3\sqrt{ab}=\frac{2}{3}\sqrt{a}$.

2) $5\frac{1}{4}\sqrt{18}:3{,}5\sqrt{2}=4\frac{1}{2}$.

3) $5\sqrt{a}:2\sqrt[4]{a^3}=\frac{5}{2a}\sqrt[4]{a^3}$.

4) $8\sqrt{3}:2\sqrt[4]{1\frac{1}{2}}=4\sqrt[4]{6}$.

5) $a\sqrt[4]{ab^{-3}}:b\sqrt{ab}=\frac{1}{b^3}\sqrt[4]{a^3b^3}$.

6) $3a^2b\sqrt[3]{a^2b^m} : a^{-2}b\sqrt[-3]{ab^{2-2m}} = 3a^5b^{-m}\sqrt[3]{b^{2m+2}}$.

7) $2a^mb\sqrt[4]{a^{2-3m}b^{m-3}} : 4a^{-m}\sqrt{a^{m-1}b^{3-m}} = \frac{a}{2b^2}\sqrt[4]{a^{3m}b^{3m+3}}$.

8) $c\sqrt{\frac{a^mb}{c^3}} : \frac{1}{b}\sqrt[3]{\frac{a^{2-m}b^4}{c^2}} = \frac{1}{a}\sqrt[6]{a^{5m+2}bc}$.

9) $\sqrt[m]{\frac{a^3b^2}{c^4d}} : \sqrt[2m]{\frac{a^6b^{-5}}{c^8d^{-2}}} = \sqrt[2m]{\frac{b^9}{d^4}}$.

10) $2\sqrt[3]{\frac{a^4b^2}{c^5}} : \frac{ac}{4}\sqrt[m]{\frac{a^{3-m}b^{m-\frac{1}{3}}}{c^{4m}}} = 8ac\sqrt[3m]{\frac{a^mbc^m}{a^9b^m}}$.

11) $x : 3\sqrt{x} = \frac{1}{3}\sqrt{x}$.

12) $3 : \sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

13) $2a^4b^2 : \sqrt[3]{4a^2b^{-4}} = a^3b^3\sqrt[3]{2ab}$.

14) $6a^4b^{-3}c : 2\sqrt[m]{\frac{a^{2m-1}c^{m-1}}{b^{3m}}} = 3a^2\sqrt[m]{ac}$.

15) $a : \sqrt[m]{a^3b^{2-m}} = ab\sqrt[m]{\frac{1}{a^3b^2}}$.

16) $\frac{3}{2}\sqrt[0,2]{a^2b^{-3}c} : \frac{3}{4}\sqrt[-5]{a^3b^4c^{-2}} = \frac{2a^{10}c^4}{b^{15}}\sqrt[5]{a^3b^4c^3}$.

17) $2\sqrt{a^2-b^2} : \sqrt{a^3-a^2b} = \frac{2}{a}\sqrt{a+b}$.

18) $\sqrt{b-\sqrt{ab}} : m\sqrt{b} = \frac{1}{m}\sqrt{1-\sqrt{\frac{a}{b}}}$.

19) $(a+b) : \frac{1}{3}\sqrt{a^2-b^2} = 3\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.

20) $\sqrt{a^8-a^4x^2} : 4(a^2+x) = \frac{1}{4}a^2\sqrt{\frac{a^2-x}{a^2+x}}$.

21) $\left(2a-4\sqrt{a}+2\frac{1}{2}a\sqrt[3]{a^2}\right) : 3\sqrt[3]{a} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2}-\frac{4}{3}\sqrt[6]{a}+\frac{5}{6}a\sqrt[3]{a}$.

22) $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{c}}-c\sqrt{\frac{ab}{c}}+ab\sqrt{\frac{c}{b}}\right) : 2b\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}} = (\sqrt[3]{ab}$
$-\sqrt[6]{ab^5c^5}+\sqrt[6]{a^4b^5c^5}) \times \frac{1}{2b^2}$.

23) $(b\sqrt{b}-ab\sqrt[3]{a^2b}-b\sqrt[m]{a^4b^3}+\sqrt[4]{b}) : a\sqrt[4]{\frac{b^3}{a}} = \frac{1}{a}\sqrt[4]{ab^3}$
$-\sqrt[12]{a^{11}b^7}-\frac{1}{a}\sqrt[4m]{a^{m+16}b^{m+12}}+\frac{1}{ab}\sqrt[4]{ab^2}$.

24) $\left(2\sqrt{2}-3\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{3}}-0{,}4\sqrt{0{,}2}\right) : \frac{4}{5}\sqrt{1\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$
$-\frac{35}{12}\sqrt{2}-\frac{1}{30}\sqrt{30}$.

25) $(4\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{-2}):6\sqrt[3]{6}=\frac{2}{9}\sqrt[3]{18}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{4}-\frac{1}{9}\sqrt[3]{9}.$

26) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}-2\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}+0{,}6\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}\right):\frac{3}{4}\sqrt[-4]{1\frac{1}{5}}=1\frac{1}{3}\sqrt[4]{0{,}6}$
$-3\sqrt[4]{0{,}4}+0{,}8\sqrt[4]{3}.$

27) $\left(18\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt{3}+3\sqrt[3]{6}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{12}\right):\frac{3}{8}\sqrt[4]{3}=16\sqrt[12]{3}$
$-2\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}+8\sqrt[12]{48}-1\frac{1}{3}\sqrt{2}.$

28) $2:(2-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}.$

29) $6:(3\sqrt{3}-5)=9\sqrt{3}+15.$

30) $1\frac{1}{2}:\left(2\sqrt{3}+2\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=7\frac{1}{2}\sqrt{2}-6\sqrt{3}.$

31) $80:\left(3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}+2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=60(\sqrt{5}-\sqrt{3}).$

32) $\sqrt{3}:(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}+3.$

33) $2\frac{1}{4}\sqrt{6}:\left(\frac{1}{2}\sqrt{10}+4\right)=\frac{1}{6}(4\sqrt{6}-\sqrt{15}).$

34) $(2-\sqrt{2}):(2+\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}.$

35) $\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right):(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})=-\left(6\frac{1}{3}+1\frac{5}{9}\sqrt{15}\right).$

36) $\left(1\frac{1}{2}-0{,}8\sqrt{2}\right):\left(3-4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=1{,}3+0{,}6\sqrt{2}.$

37) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right):(\sqrt{8}+\sqrt{6})=3-1\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

38) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}-1\frac{1}{2}\sqrt{2}\right):(\sqrt{6}-3)=\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{7}{6}\sqrt{2}.$

39) $4.(2\sqrt{5}+3\sqrt{10})^{-1}:\left(\frac{1}{7}\sqrt{10}-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)=32+22\sqrt{2}.$

40) $[(\sqrt{3}-2):(2+\sqrt{3})]:(7+4\sqrt{3})=56\sqrt{3}-97.$

41) $13\frac{1}{4}.(3\sqrt{2}-6\sqrt{5}):\left(4\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$
$=18\sqrt{2}-15\sqrt{5}.$

42) $12:(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}.$

43) $2:(\sqrt{11}+\sqrt{2}-3)=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{6}\sqrt{22}-\frac{1}{3}.$

44) $47:(2-\sqrt{3}+2\sqrt{2})=14+8\sqrt{6}-2\sqrt{2}-9\sqrt{3}.$

45) $12:(\sqrt{6}-\sqrt{10}+2)=3+\sqrt{6}+\sqrt{15}.$

46) $0{,}3:(\sqrt{0{,}8}+\sqrt{0{,}3}-\sqrt{0{,}5})=\frac{1}{5}\sqrt{3}-0{,}3\sqrt{0{,}5}+\frac{1}{2}\sqrt{0{,}3}.$

47) $\sqrt{6}:(\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6})=\frac{1}{14}(6\sqrt{2}-\sqrt{30}-3\sqrt{15}-3).$

48) $2\sqrt{3}:(3+\sqrt{2}+\sqrt{5})=\frac{1}{3}.(2\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{30}).$

49) $\left(3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right):(\sqrt{8}-\sqrt{3}+\sqrt{6})=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{6}.$

50) $\left(1-4\sqrt{3\frac{1}{3}}\right):(5+\sqrt{12}+\sqrt{10})=1\frac{2}{3}-2\sqrt{\frac{1}{3}}$
$-\frac{1}{3}\sqrt{10}.$

51) $6.(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}):(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})=3+2\sqrt{15}+\frac{5}{2}\sqrt{6}$
$-\frac{9}{2}\sqrt{10}.$

52) $(4+2\sqrt{30}):(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})=\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}.$

53) $(8+2\sqrt{42}):(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})=\sqrt{7}+\sqrt{6}-\sqrt{5}.$

54) $(6+2\sqrt{35}):(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})=\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{5}.$

55) $\left(5\sqrt{3}-2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{1\frac{1}{2}}\right):\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{5}\sqrt{6}\right)$
$=\frac{5}{2}.$

56) $(\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}):(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})=\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{3}\sqrt{15}$
$-\frac{5}{6}\sqrt{6}-1.$

57) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}):(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})=\frac{1}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{6}).$

58) $146:(5+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})=41-7\sqrt{6}-5\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

59) $47:(2\sqrt{3}-\sqrt[4]{3})=8\sqrt{3}+4\sqrt[4]{3}+\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}+2.$

60) $31:\left(\frac{1}{2}+\sqrt[4]{2}\right)=16\sqrt[4]{8}-8\sqrt{2}+4\sqrt[4]{2}-2.$

61) $39:(4\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{2})=2\sqrt[4]{125}+\sqrt[4]{50}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{20}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{8}.$

62) $13:\sqrt{5-2\sqrt{3}}=\sqrt{65+26\sqrt{3}}.$

63) $2:\sqrt{1-\sqrt{3}}=-\sqrt{-2(1+\sqrt{3})}.$

64) $3:\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\sqrt{9\sqrt{2}+3\sqrt{6}}.$

65) $a:(a-\sqrt{x})=\frac{a^2+a\sqrt{x}}{a^2-x}.$

66) $\sqrt{ab}:(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a-b}.$

67) $a\sqrt[3]{b^2} : (a\sqrt{b} - b\sqrt{a}) = \frac{a\sqrt[6]{b} + \sqrt[6]{a^3b^4}}{a-b}$.

68) $(\sqrt{x} + \sqrt{a}) : (\sqrt{x} - \sqrt{a}) = \frac{a + x + 2\sqrt{ax}}{x-a}$.

69) $1 : (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})(a-b-c+2\sqrt{bc})}{(a-b-c)^2 - 4bc}$

oder

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2 - 4ab}.$$

70) $7a : (2\sqrt{3a} + \sqrt{5a} - \sqrt{7a}) = \frac{1}{5}\sqrt{105a} - \frac{1}{2}\sqrt{7a} + 0{,}7\sqrt{5a}$.

71) $(18x - 2a + 6\sqrt{ax}) : (3\sqrt{5x} + 3\sqrt{x} - 2\sqrt{a}) = \sqrt{a}$
$- \frac{3}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{5x})$.

72) $\sqrt[4]{a} : (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x}) = \frac{a + \sqrt{ax} - \sqrt[4]{a^3x} - \sqrt[4]{ax^3}}{a-x}$.

73) $(a-1) : (\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}) = \sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{\frac{1}{a}} + 1$.

74) $a^2 : (\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[4]{a}) = \frac{(\sqrt[8]{a^3} + \sqrt[4]{a})(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt{a})(\sqrt{a^3} + a)}{a-1}$.

75) $(\sqrt[n]{a^4} - b^4) : (\sqrt[2n]{a} - \sqrt{b}) = (b^2 + \sqrt[n]{a^2})(b + \sqrt[n]{a})(\sqrt{b} + \sqrt[2n]{a})$.

76) $1:\sqrt{a+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{(a^2-b)(a-\sqrt{b})}}{a^2-b}$.

77) $(1-x):\sqrt{1-\sqrt{x}}=\sqrt{(1-x)(1+\sqrt{x})}$.

78) $\sqrt[m]{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}:\sqrt[m]{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt[m]{\frac{4a+b-4\sqrt{ab}}{4a-b}}$.

79) $\sqrt[6]{14x-4x\sqrt{6}}:\sqrt[3]{2\sqrt{3x}+\sqrt{2x}}=\sqrt[3]{\frac{7-2\sqrt{6}}{5}}$.

Aufgabe 80) bis 100) siehe den Anhang am Ende.

D. Potenzirung.

a. Fragen.

1. Wie wird eine Wurzelgröße durch irgend eine Zahl potenzirt?

2. Wann verschwindet hiebei der Radikator sammt dem Wurzelzeichen? — Was heißt demnach eine Quadratwurzel quadriren, eine Kubikwurzel kubiren u. dgl.?

3. Wie wird auf ähnliche Art die 6te, die 12te Wurzel u. dgl. quadrirt, oder kubirt? — Durch welches Verfahren geht ferner die 10te Wurzel in die 5te, die 20ste in die 4te, die 24ste in die 3te Wurzel über?

4. Welche frühern Regeln finden hier ebenfalls Anwendung?

5. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $\left(3\sqrt[4]{\frac{2}{5}a^2}\right)^3-3(\sqrt{5a^5})^3=27\sqrt[4]{\frac{2}{5}a^6}-3\sqrt{15a^{15}}$.

2) $\left(2\sqrt{(a\sqrt{b})^3}\right)^5-2\left(3\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}\right)^6=2^{15}\sqrt{a^{15}\sqrt{b^{15}}}-6^6.a^7,$

3) $\left(0{,}2\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}\right)^2-\left(0{,}2\sqrt{2\sqrt{\sqrt[3]{2}}}\right)^3=0{,}4\sqrt{\sqrt[3]{2}}$
$-0{,}8\sqrt{2\sqrt{2}},$

4) $(\sqrt[8]{a}.\sqrt[4]{b}.\sqrt{c})^2+(\sqrt[8]{a}.\sqrt[4]{b.\sqrt{c}})^2+\sqrt[8]{(a.\sqrt[4]{b\sqrt{c}})^2}$
$=\sqrt[4]{a}.\sqrt{b.c}+\sqrt[4]{a}.\sqrt{bc}+\sqrt[4]{(a.\sqrt{b\sqrt{c}})},$

5) $c(\sqrt[x^2]{a}+\sqrt[x^2]{b})^x+(m\sqrt[x^2]{a.\sqrt{b}})^{\sqrt{x}}=c(\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b})$
$+m\sqrt[\sqrt{x^3}]{a\sqrt{b}},$

6) $(\sqrt{ab\sqrt{c}})^{-3}+(\sqrt{a}-2\sqrt{b})^{-2}-\sqrt[-2]{(a-2\sqrt{b})^{-2}}$
$=\left(\sqrt{\frac{1}{ab}\sqrt{\frac{1}{c}}}\right)^3+\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-2\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2-a-2\sqrt{b}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $(2\sqrt{3a^3})^2+(3a\sqrt{a})^2+(2\sqrt[4]{a^3})^4-(a\sqrt[8]{30a^{-5}})^8=7a^3.$

2) $$(3\sqrt{a\sqrt[3]{b}})^3+\left(\left(\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}}\right)^3\right)^2+\left(-4a\sqrt{b}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{ab}}\right)^2$$
$$+(-3a\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{ab}})^3=17a\sqrt{ab}.$$

3) $$\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{32b}\right)^2+(b^{-2}\sqrt[6]{2b^{13}})^3-3(b\sqrt[8]{2b^{-7}})^4+7(\sqrt[2m]{2b})^m$$
$$=6\sqrt{2b}.$$

4) $$(\sqrt[4]{25a})^2+2\frac{1}{2}(\sqrt[6]{a})^3+(\sqrt[0,3]{a})^{\frac{3}{20}}+\left(\sqrt[3]{\frac{4}{a}}\right)^{-\frac{3}{2}}=9\sqrt{a}.$$

5) $$\frac{10((\sqrt[3]{b^{-1}})^2)^{-2}}{(3\sqrt[3]{b^{-2}})^{-1}}+(-\sqrt[3]{b^{\frac{1}{2}}})^4+2(-\sqrt[3]{b^{0,4}})^5-b^{-1}\cdot\left(\frac{-3\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^{-0,5}}}\right)^2$$
$$=20\sqrt[3]{b^2}.$$

6) $$\frac{(-2\sqrt[m]{a})^2\cdot x}{(-\sqrt{x^{-1}})^2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt[2m]{a}}{0,5}\right)^2-\left(\frac{x}{\sqrt[\frac{1}{2}]{\sqrt[-m]{a}}}\right)^2+\left(3\left((\sqrt[2m]{a})^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^2$$
$$=3\sqrt[m]{a}.$$

7) $$\left(\frac{(\sqrt[5]{b})^{3-\frac{1}{2}m}\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}}{3(\sqrt[5]{b})^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{a^{m+1}}}\right)^2\times\left(\frac{\sqrt[5]{b}\cdot\sqrt[-5]{\sqrt[3]{b^m}}}{3\sqrt[5]{\sqrt[3]{b}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\sqrt[9]{a^{2m}}}\right)^{-3}=3\sqrt[5]{b^3}.$$

8) $$\left(\frac{4\sqrt[4]{a^3}\cdot(\sqrt[6]{c^5})^{1-4m}}{\sqrt[4]{a^{3m}}\sqrt[6]{\sqrt{c^5}}}\right)^2\times\left(\frac{-\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}{8\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{c^{-5}}}\right)^3$$

$$\times\frac{[(-\sqrt[6]{c^5})^{2m-1}]^4}{(-2\sqrt[4]{a^{2m-1}})^{-3}}=\frac{1}{4}\sqrt[4]{a}.$$

9) $$\sqrt{\left(\frac{\sqrt[5]{\sqrt{a^3}}}{(\sqrt[-2]{a\sqrt[3]{ab}})^4}\right)^{-3}:\left(\frac{\sqrt[5]{\sqrt[6]{a^{0,5}}}}{(\sqrt[-3]{a\sqrt{b}})^{-2}}\right)^3}=\frac{\sqrt{a}}{a^3}.$$

10) $$\left(\frac{(1\frac{1}{2}\cdot4^{-2}\sqrt[10]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^2})^5}{30\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^2:\left(\frac{(8\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{4^{21}}\cdot\sqrt{3})^2}{\sqrt{(\sqrt[5]{3^8}\cdot4\sqrt[-5]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^4})^5}}\right)^{-2}$$

$$=4\frac{1}{2}.$$

11) $(0,3a^m-2\sqrt{5a})^2=0,09a^{2m}+20a-1,2a^m\sqrt{5a}.$

12) $(2\sqrt{3a}-5\sqrt{ab})^2=12a+25ab-20a\sqrt{3b}.$

13) $\left(\frac{1}{4}b\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2=\frac{ab}{16}+\frac{4}{a}-\sqrt{b}.$

14) $\left(a^mb\sqrt{\frac{a^{3m}}{b^{1-m}}}+\frac{b}{a^{2m}}\sqrt{\frac{a^{3-m}}{b^{m+1}}}\right)^2=a^{5m}b^{m+1}+a^{3-5m}b^{1-m}$

$+2ab\sqrt{a}.$

15) $\left(3a\sqrt[3]{b^2}-1\frac{1}{2}a\sqrt[3]{b}\right)^2=9a^2b\sqrt[3]{b}+2\frac{1}{4}a^2\sqrt[3]{b^2}-9a^2b.$

16) $(0{,}2a^3\sqrt[3]{a^2b}+2a^{-2}\sqrt[3]{-ab^2})^2=0{,}04a^7\sqrt[3]{ab^2}+4a^{-4}b\sqrt[3]{a^2b}$
$-0{,}8a^2b.$

17) $\left(1\frac{2}{3}a^3b^2\sqrt[4]{a^5b^{-2}}-1\frac{1}{5}a^{-2}b\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^2=\left(\frac{25}{9}a^8b^3\right.$
$\left.+\frac{36}{25}a^{-3}b^3\right)\sqrt{a}-4a^3b^3.$

18) $\left(\frac{2}{5}\sqrt[4]{\frac{a^3b}{c^m}}+10\sqrt[4]{\frac{a^2b}{c^{3m}}}\right)^2=\frac{4a}{25c^m}\sqrt{abc^m}+\frac{100a}{c^{2m}}\sqrt{bc^m}$
$+\frac{8a}{c^m}\sqrt[4]{ab^2}.$

19) $(a\sqrt[m]{a^3b^2c^{-4}}-b\sqrt[m]{a^xb^{-4}c^3})^2=a^2\sqrt[m]{a^6b^4c^{-8}}+b^2\sqrt[m]{a^{2x}b^{-8}c^6}$
$-2ab\sqrt[m]{a^{x+3}b^{-2}c^{-1}}.$

20) $(2a^3\sqrt{a}-6a^{-3}\sqrt[3]{a^2})^2=4a^7+36a^{-5}\sqrt[3]{a}-24a\sqrt[6]{a}.$

21) $\left(3\frac{1}{2}a^{2-m}\sqrt[3]{9a^{m-2}b^5}-1\frac{1}{3}a^{m-1}b\sqrt{6a^{m+1}b^{-1}}\right)^2$
$=\frac{147}{4}a^{2-2m}b^3\sqrt[3]{3a^{2m+2}b}+\frac{32}{3}a^{3m-1}b-28b^2\sqrt[6]{24a^{5m+5}b}.$

22) $\left(10a^2\sqrt[4]{6a^3}-\frac{1}{2}a\sqrt{3a}\right)^2=100a^5\sqrt{6a}+\frac{3}{4}a^3-10a^4\sqrt[4]{54a}.$

23) $(5a\sqrt{a\sqrt{b}}+0{,}2a\sqrt{ab})^2=25a^3\sqrt{b}+0{,}04a^3b+2a^3\sqrt[4]{b^3}.$

24) $$(a^3b^{-2}\sqrt[m]{a^{3p}b^x}-2ab^3\sqrt[2m]{4a^{2p}b^3})^2=a^6b^{-4}\sqrt[m]{a^{6p}b^{2x}}$$
$$+4a^2b^6\sqrt[m]{4a^{2p}b^3}-4a^4b\sqrt[2m]{4a^{8p}b^{2x+3}}.$$

25) $$(2\sqrt[m]{a\sqrt{2ab}}-a\sqrt[3]{ab\sqrt{a}})^2=4\sqrt[m]{2a^3b}+a^3\sqrt[3]{b^2}$$
$$-4a\sqrt[6m]{8a^{3m+9}b^{2m+3}}.$$

26) $$(2\sqrt{3}-4\sqrt{6})^2=108-48\sqrt{2}.$$

27) $$\left(1\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{5}}+1\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=\frac{115}{24}+\frac{5}{6}\sqrt{15}.$$

28) $$\left(\frac{0{,}2}{\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{0{,}6}}{5}\right)^{-2}=\frac{125}{121}(13-4\sqrt{3}).$$

29) $$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}-\frac{4\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{3}}\right)^{-2}=27\sqrt[3]{9}:(216+16\sqrt[3]{36}-48\sqrt[3]{36\sqrt{6}}).$$

30) $$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})^{-2}=5+3\frac{1}{2}\sqrt{2}-3\sqrt[4]{8}-4\sqrt[4]{2}.$$

31) $$(2\sqrt{3}-4\sqrt{2}+6)^2=8.(10-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-6\sqrt{2}).$$

32) $$\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{2}{3}\sqrt{0{,}6}-1\frac{1}{2}\sqrt{30}\right)^2=69\frac{1}{60}+6\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$$
$$-7\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

33) $\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^4=\frac{761}{4}-84\sqrt{5}.$

34) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}\right)^4=\frac{35}{72}+\frac{1}{2}\sqrt{6}-\frac{2}{9}\sqrt[4]{54}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{24}.$

35) $(\sqrt{5}+\sqrt{3\sqrt{2}-4})^4=66\sqrt{2}-61+4\sqrt{15\sqrt{2}-20}$
$+12\sqrt{30\sqrt{2}-40}.$

36) $(\sqrt{4+\sqrt{7}}-3\sqrt{4-\sqrt{7}})^4=932-352\sqrt{7}.$

37) $(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}})^4=4.$

38) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^3=\frac{5}{36}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{12}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{18}.$

39) $(\sqrt{6}-2\sqrt[3]{4})^3=6\sqrt{6}-32-36\sqrt[3]{4}+24\sqrt[6]{864}.$

40) $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}-\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}\right)^{-3}=5+3\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

41) $\left(2\sqrt[3]{4}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{16}\right)^3=159\frac{2}{3}+192\sqrt[3]{2}+96\sqrt[3]{4}$
$+4\sqrt[3]{6}+2\sqrt[3]{12}-8\sqrt[3]{18}-16\sqrt[3]{36}-32\sqrt[3]{9}.$

42) $\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}\right)^3=11\frac{3}{4}+\sqrt[4]{8}-12\sqrt[3]{2}+24\sqrt[4]{2}$
$+3\sqrt[6]{2}+\frac{3}{2}\sqrt[12]{\frac{1}{2}}-3\sqrt[6]{\frac{1}{2}}-12\sqrt[12]{2}+16\sqrt{2}.$

43) $(\sqrt{5}+2\sqrt{10})^6=6525+8000\sqrt{5}+1500\sqrt[6]{0{,}8}+1500\sqrt[3]{100}$
$+12000\sqrt[3]{10}+9600\sqrt[6]{80}.$

44) $(4a\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a})^3=64a^5-8a-96a^3\sqrt[3]{a^2}+48a^2\sqrt[3]{a}.$

45) $\left(\frac{1}{2}a^2b^{-3}\sqrt[3]{-ab^2}+\frac{2}{3}a^{-3}b^2\sqrt[3]{a^2b}\right)^3=\frac{8}{27}a^{-7}b^7$
$-\frac{1}{8}a^7b^{-7}+\frac{1}{2}a^2b^{-3}\sqrt[3]{ab^2}-\frac{2}{3}a^{-3}b^2\sqrt[3]{a^2b}.$

46) $(4a\sqrt{b}-3b\sqrt{a})^3=(64a^3b+108a^2b^2)\sqrt{b}-(27ab^3$
$+144a^2b^2)\sqrt{a}.$

47) $(a^{-2}\sqrt[4]{a^3b}+a^2\sqrt[4]{a^{-3}b})^3=a^{-4}\sqrt[4]{ab^3}+a^4\sqrt[4]{a^{-1}b^3}$
$+3a^{-2}\sqrt[4]{a^3b^3}+3a^2\sqrt[4]{a^{-3}b^3}=(a^{-4}+3a)\sqrt[4]{ab^3}$
$+(a^3+3a^{-2})\sqrt[4]{a^3b^3}.$

48) $\left(0{,}2a^{m-2}\sqrt{3ab^{m-1}}-a^{2m-1}\sqrt[3]{\frac{1}{3}a^2b^{m-2}}\right)^3$
$=0{,}024a^{3m-5}b^{m-1}\sqrt{3ab^{m-1}}-\frac{1}{3}a^{6m-1}b^{m-2}$
$-0{,}12a^{4m-4}b^{m-1}\sqrt[3]{9a^2b^{m-2}}+0{,}6a^{5m-3}b^{m-2}\sqrt[6]{\frac{1}{3}a^5b^{m+1}}.$

49) $(\sqrt[m]{a^x}-\sqrt[n]{b^{3x}})^3=\sqrt[m]{a^{3x}}-\sqrt[n]{b^{9x}}-3\sqrt[mn]{a^{2nx}b^{3mx}}$
$+3\sqrt[mn]{a^{nx}b^{6mx}}.$

E. Radicirung.

a. Fragen.

1. Wie wird eine Wurzelgröße durch irgend eine Zahl radicirt? — Wann dürfen hierbei die Radikatoren durcheinander multiplicirt werden?

2. Nach welchen Gesetzen wird aus einem Polynomium a) die Quadratwurzel, und b) die Kubikwurzel ausgezogen? — In welcher Ordnung müssen die Glieder des Polynomium genommen werden? — Ist dieses Ordnen bei einem Binomium eben so unbedingt nothwendig? — Kann sich aus einem Binomium eine rationale Wurzel ergeben?

3. Wie wird eine ganze Zahl durch 2, wie durch 3 radicirt? — Worin besteht das sogenannte Classificiren? — Ist dieses absolut nothwendig? — Woran erkennt man schon vor dem Radiciren, wie viele Ziffern eine rationale Wurzel bekommen muß?

4. Wie verfährt man hier, so oft die Wurzel irrational ist? — Bei welcher Ziffer solcher Wurzeln beginnen die Decimalstellen?

5. Bis zur wievielten Decimalstelle soll bei irrationalen Wurzeln das Radiciren fortgesetzt werden? — Wann muß die letzte von diesen Decimalziffern um eine gleichartige Einheit erhöht werden? — Gibt es hier auch Perioden?

6. Wie werden monomische Radikanden in Summen oder Differenzen verwandelt, und sodann aus den letztern die verlangte Wurzel gezogen?

7. Wie radicirt man Decimalbrüche?

8. Auf welche dreifache Art können gemeine Brüche radicirt werden? — Wann ist eine von diesen Arten die am wenigsten vortheilhafte?

9. Welche höhern Wurzeln lassen sich nach Art der Quadrat- und Kubikwurzeln angeben, und wie?

10. Wie macht man a) für rationale und b) für irrationale Wurzeln die Probe?

11. Welche frühern Regeln kommen hier ebenfalls in Anwendung?

12. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

$$1)\ \sqrt{4\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{8+\sqrt{8}} = \pm 2\sqrt[3]{2} - (2+\sqrt{2}),$$

$$2)\ \sqrt{a\sqrt{b}} + \sqrt[3]{2a\sqrt[3]{5a}} = \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[6]{10^3a^4},$$

$$3)\ 3\sqrt{4a^2b^{2x}} - m\sqrt{m^2+x^2} - \sqrt[3]{a^{3m}b^{0,7}} + \sqrt[3]{a^6-b^6}$$
$$= \pm 6ab^x - a^m b^{0,2} \pm (m^2+mx) - a^2 - b^2,$$

$$4)\ \sqrt{{m^2}^2\,{b^x}^2}\ \sqrt[\sqrt{x}]{\left(a\sqrt[\sqrt[3]{x}]{a^m}\right)} = \pm m^2b^x + \sqrt[\sqrt[6]{x}]{a^{m+\sqrt[3]{x}}},$$

$$5)\ \sqrt[3]{\frac{1-9}{-27}} + \sqrt{\frac{4}{81}} + \sqrt[3]{-\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{-27}} + \frac{\pm 2}{\pm 9} + \frac{\sqrt[3]{-7}}{\sqrt[3]{-10}},$$

$$6)\ \sqrt{0,4} - 3\sqrt{0,160} + \sqrt{0,016} = \pm 0,2 \pm 1,2 \pm 0,04,$$

7) $0{,}6\sqrt[-2]{0{,}09}+\sqrt{4{,}0025}-\sqrt{25{,}166481}=\frac{0{,}6}{0{,}3}\pm 2{,}05\mp 5{,}489$,

8) $\sqrt[6]{10}+\sqrt[4]{64}-\sqrt[6]{128}=\sqrt[3]{10\times\sqrt{10}}\pm\sqrt{64}\times\pm\sqrt{64}$
$-\sqrt[3]{\sqrt[3]{128}}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit sie deren rechter Seite entspräche?

b. Aufgaben.

α) Aus Buchstaben.

1) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}+4\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}-2\sqrt[3]{a^3\sqrt{a^{-1}}}+3\sqrt{a^2\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$
$=6\sqrt[6]{a^5}$.

2) $2a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}-\sqrt{a^3\sqrt[4]{a^3}}+\sqrt[-2]{a^{-5}\sqrt[4]{a^5}}+4a^2\sqrt[-4]{a\sqrt{\frac{1}{a}}}$
$=6a\sqrt[8]{a^7}$.

3) $3a\sqrt[3]{ab^2\sqrt[4]{a}}+\sqrt{4a^3b\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2b^2}}}$
$+1\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^4b^2\sqrt{\frac{1}{2}a\sqrt[-2]{4a}}}+\frac{1}{2}a^2b\sqrt[-3]{8b\sqrt{a^4\sqrt[-2]{a}}}$
$=6a\sqrt[12]{a^5b^8}$.

4) $\sqrt[3]{9\sqrt{3\sqrt{3a\sqrt{9a^{-1}b}}}}+\sqrt[3]{ab^2\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^3}{a}}}}}$

$-\sqrt[3]{ab\sqrt[-2]{ab^{-3}\sqrt{ab^{-1}\sqrt{\frac{a}{b^3}}}}}+\sqrt[3]{a\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt[-4]{a^3b^{-1}}}}$

$+3\sqrt{2\sqrt{2a\sqrt[-2]{\frac{1}{2}a\sqrt[3]{\frac{1}{8}a^2b^{-1}}}}}=10\sqrt[24]{ab}.$

5) $\sqrt[m]{b\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{a}}}+3\sqrt[m]{\frac{1}{a}\sqrt{a^3b\sqrt[3]{b}}}$

$+2\sqrt[-m]{b\sqrt{\frac{1}{ab}\sqrt[3]{b^{-7}}}}+\sqrt[-\frac{1}{2}m]{\sqrt{b}}\times\sqrt[4]{\frac{1}{ab^2}\sqrt[3]{b^{-4}}}$

$=7\sqrt[6m]{a^3b^4}.$

6) $2b^4\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[0,2]{b^{-2}}}+5\sqrt[0,4]{\sqrt[5]{a}\times\sqrt[10]{b^{-6}}}-\frac{3b}{a}\sqrt[0,2]{a^{-0,2}\sqrt{ab^{-1}}}$

$+a^{-2}\sqrt{a^5\sqrt[0,2]{\sqrt[5]{\frac{1}{b^3}}}}=\frac{5\sqrt{ab}}{b^2}.$

7) $\sqrt{3a^3b^4+9a^4+\frac{1}{4}a^2b^8}=\pm\left(3a^2+\frac{1}{2}ab^4\right).$

8) $\sqrt{a^{2m-2}b^2+4a^{2m-6}b^4-4a^{2m-4}b^3}=\pm(a^{m-1}b-2a^{m-3}b^2).$

9) $\sqrt{\frac{1,6a^6b^4}{3a^{3m}}+\frac{0,64\,.\,a^{8-2m}}{b^6}+\frac{1}{9}a^{4-4m}b^{14}}=\pm\left(\frac{b^7}{3a^{2m-2}}\right.$

$\left.+\frac{0,8a^4}{a^m\,b^3}\right).$

10) $\sqrt{8ab^3c+2a^2b^2c+8b^4c}=\pm(ab\sqrt{2c}+b^2\sqrt{8c})$.

11) $\sqrt{a^7b^2+a^2b-2a^4b\sqrt{ab}}=\pm(a\sqrt{b}-a^3b\sqrt{a})$.

12) $\sqrt{a^2+m+2a\sqrt{m}}=\pm(a+\sqrt{m})$.

13) $\sqrt{4a+9m-12\sqrt{am}}=\pm(2\sqrt{a}-3\sqrt{m})$.

14) $\sqrt{\frac{1}{4}x+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[6]{b^2x^3}}=\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}-\sqrt[3]{b}\right)$.

15) $\sqrt{\sqrt[m]{a^2}+4\sqrt[m]{ab}+4\sqrt[m]{b^2}}=\pm(\sqrt[m]{a}+2\sqrt[m]{b})$.

16) $\sqrt[-2]{\frac{1}{4}x^6+16x^{-2}-4x^2}=\pm\frac{2x}{x^4-8}$.

17) $\sqrt[-2]{\frac{a^6b^2}{c^2}+\frac{4a^{2m-2}b^6}{25c^4}+\frac{4a^{m+2}b^4}{5c^3}}=\pm\frac{5c^2}{5a^3bc+2a^{m-1}b^3}$.

18) $\sqrt{8a^3-\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{9}+36a^6-12a^5+a^4}=\pm\left(\frac{2}{3}-a^2+6a^3\right)$.

19) $\sqrt{2a^{2m-1}b^3+a^{2m-4}b^6+3a^{2m-2}b^4+a^{2m}b^2+2a^{2m-3}b^5}$
$=\pm(a^mb+a^{m-1}b^2+a^{m-2}b^3)$.

20) $\sqrt{(a^2\cdot10^{2m}+c^2\cdot10^{2m-4}+2bc\cdot10^{2m-3}+2ab\cdot10^{2m-1}}$
$+b^2\cdot10^{2m-2}+2ac\cdot10^{2m-2})=\pm(a\cdot10^m+b\cdot10^{m-1}$
$+c\cdot10^{m-2})$.

21) $\sqrt{\left(23a^6b^{-2}+5a^7b^{-1}+\frac{1}{4}a^8-20a^5b^{-3}+4a^4b^{-4}-3a^5b^2\right.}$
$\left.-30a^4b+9a^2b^4+12a^3\right)=\pm\left(3ab^2+2a^2b^{-2}-5a^3b^{-1}\right.$
$\left.-\frac{1}{2}a^4\right).$

22) $\sqrt{\left(\frac{4}{5abc^5d}+\frac{16bd^2}{a^3c^6}+\frac{a^4b^6}{c^{10}d^8}+\frac{16b^8}{a^2c^8d^4}+\frac{8b^6}{5c^7d^7}-\frac{4}{c^7}\right.}$
$\left.+\frac{a^2b^4}{25c^6d^{10}}-\frac{2a^3b^5}{5c^8d^9}-\frac{8ab^7}{c^9d^6}+\frac{4d^8}{a^4b^6c^4}\right)=\pm\left(\frac{a^2b^3}{c^5d^4}\right.$
$\left.-\frac{4a^{-1}b^4}{c^4d^2}-\frac{ab^2}{5c^3d^5}-\frac{2a^{-2}b^{-3}}{c^2d^{-4}}\right).$

23) $\sqrt[3]{54a^{10}b^{16}-216a^{12}b^{18}+\frac{1}{8}a^6b^{12}-4\frac{1}{2}a^8b^{14}}=\frac{1}{2}a^2b^4$
$-6a^4b^6.$

24) $\sqrt[3]{\frac{8x^9}{125}-125+30x^3-2{,}4x^6}=0{,}4x^3-5.$

25) $\sqrt[3]{3m^2x^2+x^6+m^3+3mx^4}=x^2+m.$

26) $\sqrt[3]{-(144a^{3x-1}b^m-64a^{3x}-108a^{3x-2}b^{2m}+27a^{3x-3}b^{3m})}$
$=4a^x-3a^{x-1}b^m.$

27) $\sqrt[3]{(1000b^3(a-x)^{3p}-0{,}027b^6x^{9m}-90b^4x^{3m}(a-x)^{2p}}$
$\overline{+2{,}7b^5x^{6m}(a-x)^p)}=10b(a-x)^p-0{,}3b^2x^{3m}.$

28) $\sqrt[3]{3a^{10}+a^6b^{18-12m}+3a^8b^{9-6m}+a^{12}b^{6m-9}}=a^4b^{2m-3}$
$+a^2b^{6-4m}$.

29) $\sqrt[3]{-\left(\frac{0,15x^5}{c^4m^7}-\frac{x^6}{64c^3m^9}-\frac{0,48x^4}{c^5m^5}+\frac{0,512x^3}{c^6m^3}\right)}=\frac{x^2}{4cm^3}$
$-\frac{0,8x}{c^2m}$.

30) $\sqrt[3]{8a-60\sqrt[3]{a^2b}-125b+150\sqrt[3]{ab^2}}=2\sqrt[3]{a}-5\sqrt[3]{b}$.

31) $\sqrt[3]{108m+64-27m\sqrt{m}-144\sqrt{m}}=4-3\sqrt{m}$.

32) $\sqrt[3]{a^2(1-a)-(1-\sqrt[3]{a}).3a^2\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{a^2}-a$.

33) $\sqrt[3]{2x\sqrt{2x}+x^2+6x\sqrt[3]{x^2}+3x\sqrt[6]{8x^5}}=\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x^2}$.

34) $\sqrt[3]{\sqrt[m]{a^{3p}}-\sqrt{a}-3\sqrt[6m]{a^{m+12p}}+3\sqrt[3m]{a^{m+3p}}}=\sqrt[m]{a^p}-\sqrt[6]{a}$.

35) $\sqrt[-3]{\frac{27}{8}a^5x^{-5}-9a^4x^{-4}+8a^3x^{-3}-\frac{27}{64}a^6x^{-6}}=\frac{4x^2}{8ax-3a^2}$.

36) $\sqrt[-3]{\frac{a^{6m}b^6}{15a^{3m}+1+125a^{9m}+75a^{6m}}}=\frac{5a^m}{b^2}+\frac{b^{-2}}{a^{2m}}$.

37) $\sqrt[3]{a^3+28a^9-54a^{13}-6a^5-27a^{15}-9a^{11}+3a^7}$
$=a-2a^3-3a^5.$

38) $\sqrt[3]{\left(3\frac{1}{6}ab^{14}-\frac{2}{3}a^{-1}b^{16}+8a^9b^6-4\frac{1}{8}a^3b^{12}-6a^7b^8\right.}$
$\left.+\frac{8}{27}a^{-3}b^{18}+9\frac{1}{2}a^5b^{10}\right)=2a^3b^2-\frac{1}{2}ab^4+\frac{2}{3}a^{-1}b^6.$

39) $\sqrt[3]{(a^3.10^{3m}+b^3.10^{3m-3}+c^3.10^{3m-6}+3bc^2.10^{3m-5}}$
$+3b^2c.10^{3m-4}+3a^2c.10^{3m-2}+3ac^2.10^{3m-4}$
$+6abc.10^{3m-3}+3ab^2.10^{3m-2}+3a^2b.10^{3m-1})=a.10^m$
$+b.10^{m-1}+c.10^{m-2}.$

40) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}x^{12}+16x^{16}+\frac{x^8}{256}-8x^{14}-\frac{x^{10}}{8}}=\pm\left(2x^4-\frac{1}{4}x^2\right).$

41) $\sqrt[4]{(24a^{6m-8}b^6+a^{4m-12}b^8+16a^{8m-4}b^4-8a^{5m-10}b^7}$
$-32a^{7m-6}b^5)=\pm(a^{m-3}b^2-2a^{2m-1}b).$

42) $\sqrt[6]{(135a^8m^2+a^{12}+729m^6+1215a^4m^4-540a^6m^3-18a^{10}m}$
$-1458a^2m^5)=\pm(a^2-3m).$

43) $\sqrt[6]{(a^{12m-6}b^{24}+a^{12m-18}b^{36}+15a^{12m-10}b^{28}+15a^{12m-14}b^{32}}$
$+6a^{12m-16}b^{34}+20a^{12m-12}b^{30}+6a^{12m-8}b^{26})=\pm(a^{2m-1}b^4$
$+a^{2m-3}b^6).$

44) $\sqrt{a^2\pm b^2}=\pm\left(a\pm\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}\pm\frac{b^6}{16a^5}-\frac{5b^8}{128a^7}\pm\frac{7b^{10}}{256a^9}\cdots\right).$

45) $6a\sqrt{a^2-5}=\pm\left(6a^2-15-\frac{3.5^2}{4a^2}-\frac{3.5^3}{8a^4}-\frac{15.5^4}{64a^6}\right.$
$\left.-\frac{21.5^5}{128a^8}\cdots\right).$

46) $\sqrt{x^2+1}=\pm\left(x+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+\frac{1}{16x^5}-\frac{5}{128x^7}+\frac{7}{256x^9}\cdots\right)$

oder auch

$=\pm\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\frac{7x^{10}}{256}\cdots\right).$

47) $8\sqrt{1-m^2}=\pm\left(8-4m^2-m^4-\frac{1}{2}m^6-\frac{5}{16}m^8-\frac{7}{32}m^{10}\cdots\right).$

48) $\sqrt{1+m}=\pm\left(1+\frac{1}{2}m-\frac{1}{8}m^2+\frac{1}{16}m^3-\frac{5}{128}m^4\right.$
$\left.+\frac{7}{256}m^5\cdots\right).$

49) $\sqrt{3}=\sqrt{4-1}=\pm\left(2-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^9}-\frac{5}{2^{14}}-\frac{7}{2^{17}}\cdots\right).$

50) $\sqrt{4+a}=\pm\left(2+\frac{a}{2^2}-\frac{a^2}{2^6}+\frac{a^3}{2^9}-\frac{5a^4}{2^{14}}+\frac{7a^5}{2^{17}}\cdots\right).$

51) $\sqrt{b-1}=\pm\left(1-\frac{1}{2b}-\frac{1}{8b^2}-\frac{1}{16b^3}-\frac{5}{128b^4}\right.$
$\left.-\frac{7}{256b^5}\cdots\right)\times\sqrt{b}.$

52) $\sqrt{a+b}=\pm\left(1+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^2}+\frac{b^3}{16a^3}-\frac{5b^4}{128a^4}\right.$
$\left.+\frac{7b^5}{256a^5}\cdots\right)\times\sqrt{a}.$

53) $\sqrt[-2]{a-x}=\pm\frac{\sqrt{a}}{a-x}\cdot\left(1-\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^2}-\frac{x^3}{16a^3}-\frac{5x^4}{128a^4}\right.$
$\left.-\frac{7x^5}{256a^5}\cdots\right).$

54) $\sqrt[-2]{\frac{a+x}{a-x}}=\pm\frac{1}{a+x}\cdot\left(a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}\right.$
$\left.-\frac{7x^{10}}{256a^9}\cdots\right).$

55) $\sqrt[3]{a^3\pm b^3}=a\pm\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^6}{9a^5}\pm\frac{5b^9}{81a^8}-\frac{10b^{12}}{243a^{11}}\pm\frac{22b^{15}}{729a^{14}}\cdots$

56) $\sqrt[3]{1+x^3}=1+\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{9}+\frac{5x^9}{81}-\frac{10x^{12}}{243}+\frac{22x^{15}}{729}\cdots$

57) $\sqrt[3]{1+m}=1+\frac{m}{3}-\frac{m^2}{9}+\frac{5m^3}{81}-\frac{10m^4}{243}+\frac{22m^5}{729}\cdots$

58) $9\sqrt[3]{-(x-1)}=9-3x-x^2-\frac{5x^3}{9}-\frac{10x^4}{27}-\frac{22x^5}{81}\cdots$

59) $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=2+\frac{1}{3.2^2}-\frac{1}{9.2^5}+\frac{5}{81.2^8}-\frac{10}{243.2^{11}}$
$+\frac{22}{729.2^{14}}\cdots$

60) $\sqrt[3]{p \pm q} = \left(1 \pm \frac{q}{3p} - \frac{q^2}{9p^2} \pm \frac{5q^3}{81p^3} - \frac{10q^4}{243p^4} \pm \frac{22q^5}{729p^5} \cdots\right)$
$\times \sqrt[3]{p}.$

61) $\sqrt[3]{a-1} = \left(1 - \frac{1}{3a} - \frac{1}{9a^2} - \frac{5}{81a^3} - \frac{10}{243a^4} - \frac{22}{729a^5} \cdots\right)$
$\times \sqrt[3]{a}.$

62) $\sqrt[3]{m^2+x^2} = \left(1 + \frac{x^2}{3m^2} - \frac{x^4}{9m^4} + \frac{5x^6}{81m^6} - \frac{10x^8}{243m^8}\right.$
$\left. + \frac{22x^{10}}{729m^{10}} \cdots\right) \times \sqrt[3]{m^2}.$

63) $\sqrt[-3]{a-x} = \left(1 - \frac{x}{3a} - \frac{x^2}{9a^2} - \frac{5x^3}{81a^3} - \frac{10x^4}{243a^4} - \frac{22x^5}{729a^5} \cdots\right)^{-1}$
$\times \sqrt[3]{a^{-1}}$

$= 729a^4 \sqrt[3]{a^2} : (729a^5 - 243a^4x - 81a^3x^2 - 45a^2x^3$
$- 30ax^4 - 22x^5 \ldots).$

64) $\sqrt[3]{a^3-x} = a - \frac{x}{3a^2} - \frac{x^2}{9a^5} - \frac{5x^3}{81a^8} - \frac{10x^4}{243a^{11}} - \frac{22x^5}{729a^{14}} \cdots$

65) $\sqrt[-3]{-4} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{8-6} = -1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{5}{192}$
$+ \frac{5}{384} + \frac{11}{1536} \cdots$

β. Aus bloßen Zahlen.

1) $\sqrt{3481} = \pm 59.$

2) $\sqrt{576} = \pm 24.$

3) $\sqrt{50625} = \pm 225.$

4) $\sqrt{1336336} = \pm 1156.$

5) $\sqrt{88529281} = \pm 9409.$

6) $\sqrt{481890304} = \pm 21952.$

7) $\sqrt{62523502209} = \pm 250047.$

8) $\sqrt{146,41} = \pm 12,1.$

9) $\sqrt{0,5329} = \pm 0,73.$

10) $\sqrt{70,7281} = \pm 8,41.$

11) $\sqrt{576,4801} = \pm 24,01.$

12) $\sqrt{7,890481} = \pm 2,809.$

13) $\sqrt{20,151121} = \pm 4,489.$

14) $\sqrt{0,26873856} = \pm 0,5184.$

15) $\sqrt{0,07529536} = \pm 0,2744.$

16) $\sqrt{0,010779215329} = \pm 0,103823.$

17) $\sqrt{0,009216} = \pm 0,096.$

18) $\sqrt{0,004489} = \pm 0,067.$

19) $\sqrt{0,00065536}=\pm 0,0256.$

20) $\sqrt{0,0007311616}=\pm 0,02704.$

21) $\sqrt{0,00005929}=\pm 0,0077.$

22) $\sqrt{0,000001048576}=\pm 0,001024.$

23) $\sqrt{3}=\pm 1,73205\ldots$

24) $\sqrt{7}=\pm 2,64575\ldots$

25) $\sqrt{33}=\pm 5,74456\ldots$

26) $\sqrt{89}=\pm 9,43398\ldots$

27) $\sqrt{309}=\pm 17,57839\ldots$

28) $\sqrt{934}=\pm 30,56141\ldots$

29) $\sqrt{0,24}=\pm 0,48989\ldots$

30) $\sqrt{0,05}=\pm 0,22360\ldots$

31) $\sqrt{4,19}=\pm 2,04694\ldots$

32) $\sqrt{8,15}=\pm 2,85482\ldots$

33) $\sqrt{0,4}=\pm 0,63245\ldots$

34) $\sqrt{0,7}=\pm 0,83666\ldots$

35) $\sqrt{6,7}=\pm 2,58843\ldots$

36) $\sqrt{0,038}=\pm 0,19493\ldots$

37) $\sqrt{0,081}=\pm 0,28460\ldots$

38) $\sqrt{0{,}001}=\pm 0{,}031622\ldots$

39) $\sqrt{0{,}000539}=\pm 0{,}023216\ldots$

40) $\sqrt{0{,}00008}=\pm 0{,}0089442\ldots$

41) $\sqrt{\frac{324}{361}}=\pm\frac{18}{19}.$

42) $\sqrt{\frac{1444}{2025}}=\pm\frac{38}{45}.$

43) $\sqrt{2\frac{1}{4}}=\pm\frac{3}{2}.$

44) $\sqrt{1\frac{3}{16}}=\pm 1{,}08972\ldots$

45) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm 0{,}81649\ldots$

46) $\sqrt{2\frac{4}{5}}=\pm 1{,}67332\ldots$

47) $\sqrt{\frac{5}{8}}=\pm 0{,}79056\ldots$

48) $\sqrt{\frac{1}{10}}=\pm 0{,}31622\ldots$

49) $\sqrt{6\frac{5}{11}}=\pm 2{,}54057\ldots$

50) $\sqrt{\frac{1}{70}}=\pm 0{,}11952\ldots$

51) $\sqrt[-2]{5}=\pm 0,44721\ldots$

52) $\sqrt[-2]{3\frac{7}{12}}=\pm 0,52827\ldots$

53) $\sqrt[-2]{0,8}=\pm 1,11803\ldots$

54) $\sqrt[-2]{2,004}=\pm 0,70640\ldots$

55) $\sqrt[-2]{\frac{1}{6}}=\pm 2,44948\ldots$

56) $\sqrt[-2]{2\frac{3}{8}}=\pm 0,64888\ldots$

57) $\sqrt[4]{531441}=\pm 27.$

58) $\sqrt[4]{915,0625}=\pm 5,5.$

59) $\sqrt[-4]{390625}=\pm\frac{1}{25}.$

60) $\sqrt[8]{43046721}=\pm 9.$

61) $\sqrt[3]{5832}=18.$

62) $\sqrt[3]{10648}=22.$

63) $\sqrt[3]{474552}=78.$

64) $\sqrt[3]{7529536}=196.$

65) $\sqrt[3]{1544804416}=1156.$

66) $\sqrt[3]{22164361129}=2809.$

67) $\sqrt[3]{351298031616}=7056.$

68) $\sqrt[3]{17,576}=2,6.$

69) $\sqrt[3]{91,125}=4,5.$

70) $\sqrt[3]{1,771561}=1,21.$

71) $\sqrt[3]{7,256313856}=1,936.$

72) $\sqrt[3]{351298031,616}=705,6.$

73) $\sqrt[3]{90458,382169}=44,89.$

74) $\sqrt[3]{0,132651}=0,51.$

75) $\sqrt[3]{0,830584}=0,94.$

76) $\sqrt[3]{0,019683}=0,27.$

77) $\sqrt[3]{0,097336}=0,46.$

78) $\sqrt[3]{0,002197}=0,13.$

79) $\sqrt[3]{0,000421875}=0,075.$

80) $\sqrt[3]{0,000032768}=0,032.$

81) $\sqrt[3]{0,000003375}=0,015.$

82) $\sqrt[3]{0,000000941192}=0,0098.$

83) $\sqrt[3]{7}=1,91293\ldots$

84) $\sqrt[3]{12}=2,28942\ldots$

85) $\sqrt[3]{36}=3,30192\ldots$

86) $\sqrt[3]{145}=5,25358\ldots$

87) $\sqrt[3]{844}=9,45034\ldots$

88) $\sqrt[3]{0,026}=0,296249\ldots$

89) $\sqrt[3]{0,083}=0,436207\ldots$

90) $\sqrt[3]{0,006}=0,18171\ldots$

91) $\sqrt[3]{0,002}=0,12599\ldots$

92) $\sqrt[3]{0,000236}=0,061797\ldots$

93) $\sqrt[3]{0{,}000648}=0{,}086534\ldots$

94) $\sqrt[3]{0{,}000091}=0{,}044979\ldots$

95) $\sqrt[3]{0{,}000055}=0{,}038029\ldots$

96) $\sqrt[3]{0{,}00008}=0{,}043088\ldots$

97) $\sqrt[3]{0{,}00004}=0{,}034199\ldots$

98) $\sqrt[3]{0{,}000003}=0{,}014422\ldots$

99) $\sqrt[3]{\frac{8}{9261}}=\frac{2}{21}.$

100) $\sqrt[3]{181\frac{26}{27}}=5\frac{2}{3}.$

101) $\sqrt[3]{421\frac{7}{8}}=7\frac{1}{2}.$

102) $\sqrt[3]{1\frac{3}{8}}=1{,}11199\ldots$

103) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=0{,}79370\ldots$

104) $\sqrt[3]{\frac{4}{7}}=0{,}82982\ldots$

105) $\sqrt[3]{2\frac{7}{9}}=1{,}40572\ldots$

106) $\sqrt[3]{7\frac{5}{16}}=1{,}94098\ldots$

107) $\sqrt[-3]{\frac{1}{200}}=5{,}84803\ldots$

108) $\sqrt[-3]{1\frac{1}{3}}=0{,}90856\ldots$

109) $\sqrt[-3]{12}=0{,}43679\ldots$

110) $\sqrt[-3]{900}=0{,}10357\ldots$

111) $\sqrt[-3]{0{,}06}=2{,}55436\ldots$

112) $\sqrt[-3]{-0{,}0004}=-13{,}57208\ldots$

113) $\sqrt[6]{16777216}=\pm 16.$

114) $\sqrt[6]{151334226289}=\pm 73.$

115) $\sqrt[-6]{27680640625}=\pm\frac{1}{55}.$

116) $\sqrt[-6]{4096000000}=\pm\frac{1}{40}.$

117) $\sqrt[6]{15625000000}=\pm 50.$

118) $\sqrt[9]{19683}=3.$

119) $\sqrt[9]{262144}=4.$

120) $\sqrt[12]{2176782336}=\pm 6.$

§. 13. Ueber imaginäre Wurzelgrößen.

a. Fragen.

1. Auf welche doppelte Art können imaginäre Wurzeln geschrieben werden? — Welche Schreibart verdient den Vorzug?

2. Wie werden imaginäre Wurzeln addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt, potenzirt und radicirt?

3. Sollen die Potenzen von (-1) oder vielmehr von $\sqrt[2n]{-1}$ schon während der Bearbeitung einer Aufgabe wirklich gebildet, oder bloß formel angegeben und etwa erst am Schlusse der Operation weiter entwickelt werden?

4. Was erhält man, wenn $\sqrt[2n]{-1}$ a) durch 2, b) durch 2n, c) durch 4n, d) durch $2n+1$, e) durch $4n-2$, f) durch 6n und g) durch $8n^2$ potenzirt wird?

5. Bei welchen Rechnungsarten können imaginäre Zahlen in reelle übergehen, und wann? — Welchen Einfluß übt das Reelwerden auf die Qualität des Gliedes aus?

6. Wie und wie oft ist $\sqrt{-1}$ in der Einheit (1) enthalten? — Erhält man dasselbe Resultat, man mag auf die gewöhnliche Art dividiren, oder den Divisor rational machen?

7. Welche frühern Regeln können auch hier in Anwendung kommen?

8. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $3\sqrt{-a^5}-a\sqrt{(-a)^3}=3a^2\sqrt{-a}-a^2\sqrt{a.\sqrt{-1}}$,

2) $\sqrt[4]{-a^3}\times\sqrt[3]{-a^2}+\sqrt{-a}\times\sqrt[3]{-a^2}=\sqrt[12]{a^{17}}+\sqrt[6]{(-a)^7}$,

3) $2\sqrt{-8}\times 3\sqrt{-2}-\sqrt{\frac{2}{-3}}+\sqrt{-\frac{1}{a}}=6.4+\frac{1}{3}\sqrt{6}$
$-\frac{1}{a}\sqrt{-a}$,

4) $6:\sqrt{-6}+\sqrt{-3}:\sqrt[4]{-3}-\sqrt{a}:\sqrt{-a}=\sqrt{-6}-\sqrt[4]{-3}$
$\pm\sqrt{-1}$,

5) $(\sqrt{-a})^2+(\sqrt{-a})^4+(\sqrt{-a})^6=\pm a-a^2-a^3$,

6) $(\sqrt{-a})^3+(\sqrt{-a})^{2m+2}=a\sqrt{-a}-a^{m+1}$,

7) $\left(x^{\sqrt{-2}}\right)^2+\left(x^{\sqrt{-1}}\right)^3+\sqrt[\sqrt{-1}]{a^{-\frac{1}{2}}}=x^{\sqrt{-4}}+x^{\sqrt{-9}}$
$+\sqrt{a^{-\sqrt{-1}}}$,

8) $x^{(2\sqrt{-1})^2}+x^{(-\sqrt{-3})^4}+\left(x^{(2\sqrt{-m})^2}\right)^3=\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^9}+x^{12\sqrt{-m}}$,

9) $x^{-\sqrt{m}} + 2x^{\sqrt[3]{-m}} + 3x^{\sqrt{-m}} - 4x^{\pm\sqrt{-m}} = \frac{1}{x^{\sqrt{m}}} + \frac{2}{x^{\sqrt[3]{m}}} + \frac{3}{x^{\sqrt{m}}}$

$+ \frac{1}{4x^{\pm\sqrt{m}}}$.

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit sie deren rechter Seite entspräche?

b. Aufgaben.

A. Addition und Subtraktion.

1) $\sqrt{-ab^3} + \sqrt{-a^3b} - ab\sqrt{-\frac{a}{b}} + a^2\sqrt{-\frac{b}{a}}$

$= (a+b)\sqrt{ab} \times \sqrt{-1}$.

2) $\sqrt{-a^2} + \sqrt{-b^2} + \sqrt{-c^2} - \sqrt{-x} = (a+b+c-\sqrt{x})$

$\times \sqrt{-1}$.

3) $2\sqrt{-a^2b^3} + a\sqrt{-b^5} - \frac{b^2}{a}\sqrt{-a^4b} + 3ab^2\sqrt{-\frac{1}{b}}$

$= 5ab\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$.

4) $b\sqrt[4]{-a^5b^{4m-1}} + a^2\sqrt[4]{-a^{8m-7}b^3} + a^mb\sqrt{-a^{4-m}b^{-1}}$

$+ a\sqrt{-a^{m+2}b} = (ab^m + a^{2m})\sqrt[4]{ab^3} \times \sqrt[4]{-1}$

$+ 2a^2\sqrt{a^mb} \cdot \sqrt{-1}$.

5) $\sqrt[4]{-a^2}+\sqrt[4]{-a^7}+\sqrt[4]{-a^{-1}}+\sqrt{-a}=((a+a^{-1})\sqrt[4]{a^3}$
$+(1+\sqrt[4]{-1})\cdot\sqrt{a})\cdot\sqrt[4]{-1}.$

6) $\sqrt[2m]{-a}+\sqrt[2m]{-b^{3m}}-\sqrt[2m]{-a^{4m+1}}+\sqrt[2m]{-c^3}=((1-a^2)\sqrt[2m]{a}$
$+b\sqrt[2m]{b}+\sqrt[2m]{c^3})\cdot\sqrt{-1}.$

7) $\sqrt[6]{-a^3}+\sqrt[4]{(-a)^2}+a^2\sqrt{-a^{-1}}+\sqrt[3]{a\sqrt{-a}}+a^3\sqrt{-a^{-3}}$
$=(3+2a)\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}.$

8) $\sqrt{-4}+3\sqrt{-16}-2\sqrt{-36}+8\sqrt{-\frac{1}{4}}-3\sqrt{-1\frac{7}{9}}$
$=2\sqrt{-1}.$

9) $\sqrt{-75}+6\sqrt{-\frac{1}{3}}-5\sqrt{-0{,}03}-\frac{3}{4}\sqrt{-1\frac{1}{3}}$
$+3\sqrt{-(0{,}1875)^{-1}}=10\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}.$

10) $\sqrt[4]{-16}+3\sqrt[4]{-4}+\sqrt{-2}-\sqrt[6]{-8}-\sqrt[12]{-64}$
$=(1+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt[4]{-1}.$

11) $10\sqrt{-\frac{1}{5}}+\sqrt[4]{(-5)^2}-\sqrt[6]{-125}-\sqrt[6]{-8000}+500\sqrt[0,4]{\frac{1}{5}}$
$\times\sqrt{-1}=4\sqrt{5}\times\sqrt{-1}.$

B. Multiplikation.

1) $(m+\sqrt{-a}+\sqrt{p}+\sqrt{-b}-\sqrt{-c})\times 2\sqrt{-x}=(2m\sqrt{x}$
$+2\sqrt{px})\cdot\sqrt{-1}-2\sqrt{ax}-2\sqrt{bx}+2\sqrt{cx}.$

2) $(3\sqrt{-a}-\frac{1}{2}\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-a^{-1}}-\sqrt{a}+\sqrt{a^3})\times 4\sqrt{-a}$
$=2a^2-8a+(4a^2-4a)\sqrt{-1}.$

3) $(\sqrt[4]{-a^3b^2}+\sqrt[4]{-a^2b^3}-\frac{b}{a}\sqrt[4]{-a^6b^{-1}}+\sqrt[4]{-a^{-2}b^7})$
$\times\sqrt[4]{-a^5b}=(a^2\sqrt[4]{b^3}+b^2\sqrt[4]{a^3})\cdot\sqrt{-1}.$

4) $\left(\sqrt{-ax}+\sqrt[3]{-a^3x}-x\sqrt{-\frac{a}{x}}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{x}\right)\times\sqrt{-ax}$
$=((1-a)\sqrt[6]{a^3x^5}+a\sqrt{x})\cdot\sqrt{-1}.$

5) $\left(2\sqrt{-3}-4\sqrt{-8}+5\sqrt{-\frac{1}{2}}-\sqrt{-12}\right)\times 2\sqrt{-4}$
$=22\sqrt{2}.$

6) $\left(3-\sqrt{-\frac{1}{2}}-2\sqrt{5}-6\sqrt{-8}+\sqrt{0{,}2}\right)\times\sqrt{-10}$
$=25\sqrt{5}+(3\sqrt{10}-9\sqrt{2})\cdot\sqrt{-1}.$

7) $(\sqrt{a}+\sqrt{-b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{-b})=a+b.$

8) $(a\sqrt{-b}-2a\sqrt{-2b})\times(a^2\sqrt{-b}-a\sqrt{-3b})=2a^3b\sqrt{2}$
$+a^2b\sqrt{3}-2a^2b\sqrt{6}-a^3b.$

9) $(a\sqrt{-b}+2\sqrt{-a}+3b\sqrt{-c}).(a\sqrt{-b}-2\sqrt{-a}-3b\sqrt{-c})$
$=12b\sqrt{ac}-a^2b+4a+9b^2c.$

10) $(\sqrt{-a}+2\sqrt[4]{-a^3}-6\sqrt[4]{-a})\times(\sqrt[4]{-a}-2\sqrt[4]{-a^3}+6\sqrt[4]{-a})$
$=(24a-4a\sqrt{a}-36\sqrt{a}).\sqrt{-1}-a.$

11) $(4+\sqrt{-3})\times(4-\sqrt{-3})=19.$

12) $(\sqrt{3}-2\sqrt{-2})\times(\sqrt{3}+2\sqrt{-2})=11.$

13) $\left(2\sqrt{-5}+\frac{1}{2}\sqrt{-4}\right)\times\left(2\sqrt{-5}-\frac{1}{2}\sqrt{-4}\right)=-19.$

14) $(7-\sqrt{-10})\times(2-\sqrt{-10})=4-9\sqrt{10}.\sqrt{-1}.$

15) $\left(2\sqrt{-5}-\frac{1}{2}\sqrt{-4}\right)\times(3\sqrt{-5}+40\sqrt{-1})=10-77\sqrt{5}.$

16) $(\sqrt{3}+4\sqrt{-6})\times(3\sqrt{3}-2\sqrt{-6})=57+30\sqrt{2}.\sqrt{-1}.$

17) $(4\sqrt{-2}-2\sqrt{2})\times\left(\frac{1}{2}\sqrt{-2}-3\sqrt{2}\right)=8-26\sqrt{-1}.$

18) $(\sqrt{-2}+\sqrt{-3}+\sqrt{-4})\times(\sqrt{-2}-\sqrt{-3}-\sqrt{-4})$
$=5+4\sqrt{3}.$

19) $\left(\sqrt{-3}-\frac{1}{2}\sqrt{-6}+\frac{2}{3}\sqrt{-8}\right)\times\left(\sqrt{-3}+\frac{1}{2}\sqrt{-6}\right.$
$\left.-\frac{2}{3}\sqrt{-8}\right)=2\frac{1}{18}-2\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

20) $(8\sqrt{-3}-\sqrt{-6}+16\sqrt{-2}-4\sqrt{-1})\times(\sqrt{-3}-2\sqrt{-2})$
$=40-5\sqrt{2}.$

21) $(3\sqrt{-2}+3\sqrt{2}+\sqrt{-4}+2)\times(3\sqrt{-1}-\sqrt{-2})$
$=(\sqrt{-1}-1).7\sqrt{2}.$

22) $(\sqrt{-0{,}5}-\sqrt{-0{,}2}-\sqrt{-0{,}7})\times(\sqrt{-5}-\sqrt{-2}+\sqrt{-7})$
$=2.$

C. Division.

1) $b:\sqrt{-a}=-\frac{b}{a}\sqrt{-a}.$

2) $b:\sqrt[4]{-a}=-\frac{b}{a}\sqrt[4]{-a^3}.$

3) $b:\sqrt[2m]{-a}=-\frac{b}{a}\sqrt[2m]{-a^{2m-1}}.$

4) $(\sqrt{b}+\sqrt{-b}):\sqrt{-a}=(1-\sqrt{-1}).\frac{\sqrt{ab}}{a}.$

5) $(\sqrt[4]{-b}-\sqrt[4]{b}):\sqrt[4]{-a}=(1+\sqrt[4]{-1}).\frac{\sqrt[4]{a^3b}}{a}.$

6) $(\sqrt{-a}+\sqrt{-b}-\sqrt{-c}+\sqrt{d}):\sqrt{-m}=\sqrt{\frac{a}{m}}$
$+\sqrt{\frac{b}{m}}-\sqrt{\frac{c}{m}}-\sqrt{-\frac{d}{m}}.$

7) $(a\sqrt{-1}+a^2\sqrt{-1}-a^3\sqrt{-1}+\sqrt{a^3}):a\sqrt{-1}=1+a$
$-a^2-\sqrt{-a}.$

8) $(\sqrt[4]{-ab^2}-2\sqrt[4]{-a^3b^3}-b\sqrt[4]{-ab}+\sqrt[4]{a^2b}):\frac{1}{2}\sqrt[4]{-ab}$
$=2\sqrt[4]{b}-4\sqrt[4]{a^2b^2}-2b-2\sqrt[4]{-a}.$

9) $(\sqrt{-m}+\sqrt[3]{-m^2}+\sqrt[4]{-m^3}+\sqrt{m}+m):\sqrt{-m}=1$
$-\sqrt[6]{-m}-\sqrt[4]{-m}-\sqrt{-1}-\sqrt{-m}.$

10) $m:(2\sqrt{a}+3\sqrt{-b})=\frac{m(2\sqrt{a}-3\sqrt{-b})}{4a+9b}.$

11) $\sqrt{x}:(x+2\sqrt{-x})=\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{-1}}{x+4}.$

12) $\sqrt{-a}:(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})=\frac{a+\sqrt{ab}}{a-b}.$

13) $\sqrt{a}\,.\sqrt{-1}:(\sqrt[4]{-a}-\sqrt[4]{-b})$
$=\frac{(a\sqrt[4]{a}+a\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a^3b^2}+\sqrt[4]{a^2b^3})\,.\sqrt[4]{-1}}{a-b}.$

14) $10a:(\sqrt{-6a}+\sqrt{-a}+\sqrt{-5a})=(\sqrt{30a}-\sqrt{5a}$
$-5\sqrt{a}).\sqrt{-1}$.

15) $(a-1-3\sqrt{-a}):(\sqrt[4]{-a^3}-\sqrt{-a}+a)=1-\dfrac{\sqrt{-a}+\sqrt[4]{-a^3}}{a}$.

16) $(2+4\sqrt{2}+6\sqrt{-2}+8\sqrt{-1}):4\sqrt{-1}=2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$
$-\sqrt{-2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}$.

17) $(6\sqrt{-4}+12\sqrt{-6}+6\sqrt{-12}-4\sqrt{-8}):2\sqrt{-2}$
$=3\sqrt{2}+6\sqrt{3}+3\sqrt{6}-4$.

18) $\left(\sqrt[4]{-8}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{-12}+5\sqrt[4]{-16}+\sqrt[4]{-24}\right):\frac{1}{4}\sqrt[4]{-4}$
$=4\sqrt[4]{2}-2\sqrt[4]{3}+20\sqrt[4]{4}+4\sqrt[4]{6}$.

19) $(\sqrt[4]{-9}+\sqrt[4]{-3}-\sqrt{3}-3):\sqrt{-3}=-\sqrt[4]{-1}-\frac{1}{3}\sqrt[4]{-3}$
$+\sqrt{-1}+\sqrt{-3}$.

20) $7:(2-\sqrt{-3})=2+\sqrt{-3}$.

21) $14:(2\sqrt{3}-2\sqrt{-4})=\sqrt{3}+2\sqrt{-1}$.

22) $13\sqrt{-1}:(4\sqrt{-5}-3\sqrt{-6})=2\sqrt{5}+1\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

23) $6\sqrt{-3}:(3\sqrt{2}-\sqrt{-6})=\frac{3}{4}(\sqrt{-6}-\sqrt{2})$.

24) $(\sqrt{8}-2):(\sqrt{-2}-\sqrt{-4})=\sqrt{-2}$.

25) $70:(\sqrt{-12}-\sqrt{-5}+\sqrt{-7})=(7\sqrt{5}-5\sqrt{7}-2\sqrt{105})$
$\times\sqrt{-1}$.

26) $(2\sqrt{5}-(3\sqrt{5}-10)\sqrt{-1}):(2-(3-2\sqrt{5})\cdot\sqrt{-1})$
$=\sqrt{5}$.

27) $(2\sqrt{-2}+2\sqrt{-3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}):(\sqrt{2}-\sqrt{-12})$
$=(2+\sqrt{6})\cdot\sqrt{-1}$.

28) $\sqrt{-3}:\sqrt{2\sqrt{-3}+\sqrt{-9}}=\sqrt{(2\sqrt{3}-3)\sqrt{-1}}$.

29) $\sqrt{3\sqrt{-2}-6}:\sqrt{4-\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{-2}-5}{3}}$.

30) $\sqrt[m]{2\sqrt{-1}-4\sqrt{-3}}:\sqrt[m]{\sqrt[4]{-4}+\sqrt[4]{-48}}$
$=\sqrt[m]{\sqrt[4]{-4}-2\sqrt[4]{-3}}$.

31) $1:(\sqrt{2}-\sqrt{-2}-\sqrt[-2]{-2^{-2}})=\frac{1}{4}(\sqrt{2}\pm\sqrt{-1}-1)$.

D. Potenzirung.

1) $(\sqrt{-1})^{2n}+(\sqrt{-1})^{2n+1}+(\sqrt{-1})^{2n+2}+(\sqrt{-1})^{2n+3}$
$+(\sqrt{-1})^{2n+4}=2(-1)^n+(-1)^{n+1}.$

2) $(\sqrt{-1})^{4n}+(\sqrt{-1})^{4n+1}+(\sqrt{-1})^{4n+2}+(\sqrt{-1})^{4n+3}$
$+(\sqrt{-1})^{4n+4}=1.$

3) $(a\sqrt{-1})^{2n}=(-a^2)^n.$

4) $(a\sqrt{-1})^{4n}=a^{4n}.$

5) $(a\sqrt{-1})^{2n+1}=(-a^{2+\frac{1}{n}})^n.\sqrt{-1}.$

6) $(a^2\sqrt{-2a})^2+(2a\sqrt[3]{-a^2})^3+(a\sqrt[4]{-a})^4$
$-(2a^2\sqrt{-a^{-1}\sqrt[-2]{-a}})^4=5a^5.$

7) $(\sqrt[4]{-x})^2+\left(\frac{1}{x}\sqrt[6]{-4x^7}\right)^3+x(\sqrt[m]{\sqrt[4]{-x^{-1}}})^{2m}$
$+((x\sqrt[4m]{-9x^{1-4m}})^m)^2=7\sqrt{-x}.$

8) $6a^{1-m}(\sqrt{-a})^{4m-3}+(\sqrt{-b})^{4m}+b(\sqrt[4]{-b})^{8m-4}$
$=6a^{m-1}\sqrt{a}.\sqrt{-1}.$

9) $(a-b\sqrt{-a})^2=a^2-ab^2-2ab\sqrt{-a}.$

10) $(a\sqrt[3]{m}+\sqrt{-x})^2=a^2\sqrt[3]{m^2}+2a\sqrt[6]{-m^2x^3}-x.$

11) $(\sqrt[4]{-a^3}+b\sqrt[4]{-a})^2=(a+b^2)\sqrt{-a}+2ab\sqrt{-1}.$

12) $(2\sqrt{-a}-3\sqrt[4]{-b})^2=9\sqrt{-b}-4a-12\sqrt[4]{-a^2b}.$

13) $(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})^3=(3a+b)\sqrt{-b}-(3b+a)\sqrt{-a}.$

14) $(4\sqrt[3]{a}+3\sqrt{-a})^3=64a-27a\sqrt{-a}+144a\sqrt[6]{-a}$
$-108a\sqrt[3]{a}.$

15) $(5-3\sqrt{-2})^2=7-30\sqrt{-2}.$

16) $\left(3\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{-4}\right)^2=26+6\sqrt{-3}.$

17) $\left(\sqrt{-6}-4\sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^2=8\sqrt{3}-14.$

18) $(3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3})^2=-(57+12\sqrt{15}).$

19) $(\sqrt{-3}+\sqrt{-2}-\sqrt{-1})^2=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2\sqrt{6}-6.$

20) $(2\sqrt{-2}-4\sqrt{-1})^3=(160-112\sqrt{2}).\sqrt{-1}.$

21) $(\sqrt{-1}+\sqrt{-2})^4=17+12\sqrt{2}.$

22) $(\sqrt{-3}-\sqrt{-1})^6=120\sqrt{3}-208.$

E. Radicirung.

1) $\sqrt{a^2-9x-6a\sqrt{-x}}=\pm(a-3\sqrt{-x})$.

2) $\sqrt{18b-16m-24\sqrt{-2bm}}=\pm(3\sqrt{2b}-4\sqrt{-m})$.

3) $\sqrt{2ab-a^2-b^2}=\pm(\sqrt{-a^2}-\sqrt{-b^2})=\pm(a-b)\cdot\sqrt{-1}$.

4) $\sqrt{2x\sqrt{-1}+(1+x)\sqrt{-x}}=\pm(\sqrt[4]{-x}+\sqrt[4]{-x^3})$.

5) $\sqrt{9\sqrt{-2m}-6\sqrt[4]{2am}+\sqrt{-a}}=\pm(3\sqrt[4]{-2m}-\sqrt[4]{-a})$.

6) $\sqrt[3]{(8b+6a)\sqrt{-b}-(12b+a)\sqrt{-a}}=\sqrt{-a}-2\sqrt{-b}$.

7) $\sqrt[3]{x+x^3\sqrt{-1}-3x\sqrt[6]{-x^4}-3x^2\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}-x\sqrt{-1}$.

8) $\sqrt{-(a^2+b^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{-1}=\pm\left(a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}+\ldots\right)\times\sqrt{-1}$.

§. 14. Ueber die Zerlegung des Ausdruckes $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ in folgende zwei Glieder:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

a. Fragen.

1. Wann läßt sich die monomische Wurzelgröße $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ in obiges Binomium zerlegen?

2. Darf man die gegebenen Glieder a und $\sqrt{b}$ auf ihren Stellen gegenseitig vertauschen; muß man ferner die in diesen zwei Gliedern bisweilen vorkommenden gleichen Faktoren ausklammern?

3. Wie macht man hier die Probe? — Wie verwandelt man demnach umgekehrt jedes beliebige Binomium der Art in ein Monomium von der oben gegebenen Form:

4. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3 \pm 2}{2}} - \sqrt{\frac{3 \mp 2}{2}},$

2) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{11-7}{2}} - \sqrt{\frac{11+7}{2}},$

3) $\sqrt{9-\sqrt{-5}} = \sqrt{\frac{9+2}{2}} - \sqrt{\frac{9-2}{2}},$

4) $\sqrt{\sqrt{8}-3} = \sqrt{3-\sqrt{8}},$

5) $\sqrt{6\sqrt{3}+4\sqrt{6}}=\sqrt{(6+4\sqrt{2})}\times\sqrt{3}$,

6) $\sqrt{-5}+\sqrt{2}=\sqrt{-(2\sqrt{10}+3)}$

gefehlt? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite verbessert werden, damit aus ihr deren rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

3) $\sqrt{12+\sqrt{23}}=\sqrt{\frac{23}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

4) $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

5) $\sqrt{7+\sqrt{48}}=2+\sqrt{3}$.

6) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$.

7) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{7}-2$.

8) $\sqrt{11-2\sqrt{30}}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

9) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}=4+\sqrt{2}.$

10) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$

11) $\sqrt{9+\sqrt{77}}=\sqrt{\frac{11}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}.$

12) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}.$

13) $\sqrt{\sqrt{3}-2}=\sqrt{-\frac{1}{2}}-\sqrt{-\frac{3}{2}}.$

14) $\sqrt{\sqrt{15}-8}=\sqrt{-\frac{1}{2}}-\sqrt{-\frac{15}{2}}.$

15) $\sqrt{1+\sqrt{-3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}}.$

16) $\sqrt{4+3\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}}.$

17) $\sqrt{2\sqrt{-10}+3}=\sqrt{5}+\sqrt{-2}.$

18) $\sqrt{-5+\sqrt{-11}}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{11}{2}}.$

19) $\sqrt{\sqrt{-3}-1}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{3}{2}}.$

20) $\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\frac{9}{2}}+\sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$

21) $\sqrt{3+2\sqrt{3}}=\sqrt[4]{\frac{27}{4}}+\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$

22) $\sqrt{2\sqrt{-4}+\sqrt{-12}}=\sqrt[4]{-9}+\sqrt[4]{-1}.$

23) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{108}}=\sqrt[6]{\frac{27}{4}}+\sqrt[6]{\frac{1}{4}}.$

24) $\sqrt{2\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{18}}=\sqrt[8]{\frac{81}{8}}-\sqrt[8]{\frac{1}{8}}.$

§. 15. Ueber Permutationen, Combinationen und Variationen.

A. Permutationen.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter Element? — Wann heißen Elemente variabel, wann constant und wann gleich?
2. Was nennt man eine Gruppe oder eine Complexion?
3. Was versteht man unter Permutiren?
4. Nach welcher Formel ergibt sich für m ungleiche variable Elemente die Anzahl der möglichen Permutationen?
5. Wie heißt die Formel dann, wenn unter den gegebenen Elementen einige gleich (z. B. $bb=b^2$ oder $a^{-1}a^{-1}=a^{-2}$), — und dann, wenn einige constant sind?

b. Aufgaben.

1) $nP\ (abcd) = 24$.
2) $nP\ (abcdef) = 720$.
3) $nP\ (a^2bcde) = 360$.
4) $nP\ (a^3bc^4d) = 2520$.
5) $nP\ (ab^{-2}c^3d^2) = 1680$.
6) $nP\ (a^6b^4) = 210$.
7) $nP\ (a^{-2}b^2) = 6$.
8) $nP\ (a^m) = 1$.
9) $nP\ (a^{m-1}b) = m$.

10) $nP\ (a^{m-3}b^3) = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$.

11) $nP\ (a^{m+2}b^2) = \frac{(m+4)(m+3)}{1.2}$.

12) $nP\ (a^{m-n}b^n) = \frac{(m-n+1)(m-n+2)\ldots\ldots m}{1.2\ldots\ldots n}$.

13) Wie viele verschiedene neunzifferige Zahlen lassen sich aus den neun arabischen Ziffern bilden?
Antw. 362880.

14) Wie viele verschiedene andere Zahlen lassen sich aus den Ziffern der Zahl 8553855 noch bilden?
Antw. 104.

15) Wie viele verschiedene sechszifferige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 720084 bilden?
Antw. 240.

16) a. Wie oft lassen sich die Buchstaben von dem Worte studiosus permutiren?
Antw. 30240mal.

b. Wie viele dieser Permutationen fangen mit st an?
Antw. 1260.

c. In wie vielen jener Permutationen stehen die vier Vokale neben einander?
Antw. In 1440.

17) a. Wie oft können zwölf Personen immer in einer andern Ordnung bei Tische sitzen?
Antw. 479001600mal.

b. Wie oft dann, wenn die älteste und jüngste Person ihre ersten Plätze immer behalten?
Antw. 3628800mal.

B. Combinationen.

1. Ohne Wiederholung der Elemente.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter Combiniren ohne Wiederholung der Elemente?

2. Welche Formel gibt die Anzahl der Combinationen für m sich nicht wiederholende Elemente an?

b. Aufgaben.

1) nC_3 (abcde)=10.
2) nC_4 (abcdefg)=35.
3) nC_5 (abcdefg)=21.
4) Wie viele Complexionen, jede zu 8 Buchstaben, geben die 24 Buchstaben des Alphabets?
Antw. 735471.
5) Wie viele so genannte Estratto, Ambo, Terno, Quaterno und Quinterno geben
$\left.\begin{array}{r}\alpha.\ 5\\ \beta.\ 90\end{array}\right\}$ verschiedene Elemente?

Antw. bei α. 5 Estr.; 10 Ambo; 10 Terno; 5 Quaterno; 1 Quinterno.
bei β. 90 Estr.; 4005 Ambo; 117480 Terno; 2555190 Quaterno; 43949268 Quint.

2. Mit Wiederholung der Elemente.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter Combiniren mit Wiederholung der Elemente?

2. Nach welcher Formel ergibt sich für m auch sich wiederholende Elemente die Anzahl der nach den verschiedenen Classen möglichen Complexionen?

b. Aufgaben.

1) nC_2 (abcd)$=10$.
2) nC_3 (abcd)$=20$.
3) nC_5 (abcdef)$=252$.
4) Wie viele verschiedene Würfe sind
α. mit 2 } Spielwürfeln möglich?
β. mit 4 }
Antw. Bei α. 21 und bei β. 126.

C. Variationen.

1. Ohne Wiederholung der Elemente.

a. Fragen.

1. Was heißt Variiren ohne Wiederholung der Elemente?

2. Welche Formel bestimmt hier die Anzahl der Complexionen für m Elemente in den verschiedenen Classen?

b. Aufgaben.

1) nV_3 (abcd)=24.
2) nV_5 (abcdefg)=2520.
3) nV_6 (abcdefg)=5040.

2. Mit Wiederholung der Elemente.

a. Fragen.

1. Was heißt Variiren mit Wiederholung der Elemente?

2. Welche Formeln der verschiedenen Classen geben die Anzahl der Complexionen hier für m Elemente an?

b. Aufgaben.

1) nV_2 (abc)=9.
2) nV_5 (abcd)=1024.
3) nV_4 (abcde)=625.
4) Wie viele Würfe überhaupt sind mit drei Würfeln möglich?
   Antw. 216.
5) Wie viele zwei=, drei= und vierzifferige ganze Zahlen lassen sich aus den neun arabischen Ziffern nebst der Nulle bilden?
   Antw. 90 zwei=, 900 drei= und 9000 vierzifferige.

§. 16. Ueber das binomische Gesetz.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter dem binomischen Satze, und was hat er mit den ihm unmittelbar vorangehenden Variationen gemein?

2. Kann er nicht auch auf Monomien, ferner auf drei- und mehrtheilige Größen angewendet werden, und wie?

3. Wie kann man nach diesem Satze auch radiciren?

4. Wann nimmt die Gliederreihe kein Ende; wann aber ist die Anzahl der Glieder begrenzt, und wie viele Glieder müssen es dann seyn?

5. Nach welchem Gesetze bestimmen sich die Coefficienten einzelner Glieder?

6. Wie groß ist in jedem Gliede die Summe der Exponenten der zu potenzirenden Binomialglieder; wie bestimmt man für einen gegebenen Fall einen jeden von diesen Exponenten? — Wie findet man sonach irgend ein Glied dieser Reihe?

7. Welche Qualitätszeichen haben die Glieder a) von $(a+b)^5$, b) von $(a-b)^{-7}$, c) von $\sqrt[6]{\frac{1}{a-b}}$, d) von $(a-b)^6$, e) von $(a-\sqrt{-b})^6$, f) von $\sqrt[6]{a-b}$ und g) von $(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^6$, wenn diese Potenz- und Wurzelgrößen nach dem binomischen Gesetze in die entsprechenden Reihen verwandelt werden?

b. Aufgaben.

1) $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

2) $(a-b)^7=a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4-21a^2b^5$
$+7ab^6-b^7$.

3) $(a+b)^9+(a-b)^9=2.(a^9+36a^7b^2+126a^5b^4+84a^3b^6$
$+9ab^8)$.

4) $(1-x)^{10}=1-10x+45x^2-120x^3+210x^4-252x^5+210x^6$
$-120x^7+45x^8-10x^9+x^{10}$.

5) $(a^3-b^2)^8=a^{24}-8a^{21}b^2+28a^{18}b^4-56a^{15}b^6+70a^{12}b^8$
$-56a^9b^{10}+28a^6b^{12}-8a^3b^{14}+b^{16}$.

6) $(4a^m-3)^7=16384a^{7m}-86016a^{6m}+193536a^{5m}$
$-241920a^{4m}+181440a^{3m}-81648a^{2m}+20412a^m-2187.$

7) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x\right)^5=\frac{1}{32}+\frac{5}{24}x+\frac{5}{9}x^2+\frac{20}{27}x^3+\frac{40}{81}x^4+\frac{32}{243}x^5.$

8) $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{4}ax^3\right)^6=64x^3-48ax^5\sqrt{x}+15a^2x^8-\frac{5}{2}a^3x^{10}\sqrt{x}$
$+\frac{15}{64}a^4x^{13}-\frac{3}{256}a^5x^{15}\sqrt{x}+\frac{1}{4096}a^6x^{18}.$

9) $\sqrt[13]{\left(2m^2-\frac{a}{x}\right)^{104}}=\left(2m^2-\frac{a}{x}\right)^8=256m^{16}-\frac{1024am^{14}}{x}$
$+\frac{1792a^2m^{12}}{x^2}-\frac{1792a^3m^{10}}{x^3}+\frac{1120a^4m^8}{x^4}-\frac{448a^5m^6}{x^5}$
$+\frac{112a^6m^4}{x^6}-\frac{16a^7m^2}{x^7}+\frac{a^8}{x^8}.$

10) $(2\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x^3})^4=16x\sqrt[3]{x}-128x\sqrt[4]{x^3}+384x^2\sqrt[6]{x}$
$-512x^2\sqrt[12]{x^7}+256x^3.$

11) $(25)^4=(20+5)^4=(30-5)^4=390625.$

12) $(1-2x)^5=1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5.$

13) $(a-\sqrt{-a})^8=a^8-8a^7\sqrt{-a}-28a^7+56a^6\sqrt{-a}+70a^6$
$-56a^5\sqrt{-a}-28a^5+8a^4\sqrt{-a}+a^4.$

14) $(2\sqrt{-3}+3\sqrt{-2})^6=-(104760+42768\sqrt{6}).$

15) $(a+b-c)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
$-5a^4c-20a^3bc-30a^2b^2c-20ab^3c-5b^4c+10a^3c^2$
$+30a^2bc^2+30ab^2c^2+10b^3c^2-10a^2c^3-20abc^3-10b^2c^3$
$+5ac^4+5bc^4-c^5.$

16) $\left(2-3a^2+\frac{1}{2}ax^3\right)^6=64-576a^2+2160a^4-4320a^6$
$+4860a^8-2916a^{10}+729a^{12}+96ax^3-720a^3x^3+2160a^5x^3$
$-3240a^7x^3+2430a^9x^3-729a^{11}x^3+60a^2x^6-360a^4x^6$
$+810a^6x^6-810a^8x^6+\frac{1215}{4}a^{10}x^6+20a^3x^9-90a^5x^9$
$+135a^7x^9-\frac{135}{2}a^9x^9+\frac{15}{4}a^4x^{12}-\frac{45}{4}a^6x^{12}+\frac{135}{16}a^8x^{12}$
$+\frac{3}{8}a^5x^{15}-\frac{9}{16}a^7x^{15}+\frac{1}{64}a^6x^{18}.$

17) $\left(3a-2b^2+\frac{1}{2}c\right)^4=81a^4-216a^3b^2+216a^2b^4-96ab^6$
$+16b^8+54a^3c-108a^2b^2c+72ab^4c-16b^6c+13\frac{1}{2}a^2c^2$
$-18ab^2c^2+6b^4c^2+\frac{3}{2}ac^3-b^2c^3+\frac{1}{16}c^4.$

18) $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a})^5=a^2\sqrt{a}-5a^2\sqrt[3]{a}-5a^2\sqrt[4]{a}+10a^2\sqrt[6]{a}$
$+20a^2\sqrt[12]{a}-30a\sqrt[12]{a^{11}}-25a\sqrt[6]{a^5}+10a\sqrt[4]{a^3}+29a\sqrt[3]{a^2}$
$+15a\sqrt[12]{a^7}-5a\sqrt{a}-10a\sqrt[12]{a^5}-5a\sqrt[3]{a}-a\sqrt[4]{a}.$

19) $(x-1)^{-3}=x^{-3}+3x^{-4}+6x^{-5}+10x^{-6}+15x^{-7}+21x^{-8}\ldots.$

20) $\sqrt[3]{a-b}=\left(1-\frac{b}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}-\frac{5b^3}{81a^3}\ldots\right)\times\sqrt[3]{a}.$

21) $\frac{2a}{\sqrt{a+1}}=\left(1-\frac{1}{2a}+\frac{3}{8a^2}-\frac{5}{16a^3}+\frac{35}{128a^4}\ldots\right)\times 2\sqrt{a}.$

22) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[5]{(1-b)^8}}=\left(1+\frac{3b}{5}+\frac{12b^2}{5^2}+\frac{52b^3}{5^3}+\frac{234b^4}{5^4}\ldots\right)$
$\times\frac{\sqrt{b}}{1-b}.$

23) $1:(a-b)^4=a^{-4}+4a^{-5}b+10a^{-6}b^2+20a^{-7}b^3+35a^{-8}b^4\ldots$

24) $\sqrt[5]{4}=(3+1)^{\frac{1}{5}}=\left(1+\frac{1}{5.3}-\frac{2}{25.9}+\frac{2}{125.9}-\frac{7}{625.27}\ldots\right)$
$\times\sqrt[5]{3}.$

25) $\sqrt[7]{(a^3+b^3)^4}=\left(1+\frac{4b^3}{7a^3}-\frac{6b^6}{7^2a^6}+\frac{20b^9}{7^3a^9}-\frac{85b^{12}}{7^4a^{12}}\ldots\right)$
$\times a\sqrt[7]{a^5}.$

Wie heißt

26) von $(a-b)^m$ das 9te Glied?
Antw. $+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-7)}{1.\;2.\;3\ldots\ldots 8}a^{m-8}b^8.$

27) von $(a+b)^{-m}$ das 10te Glied?
Antw. $-\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+8)}{1.\;2.\;3\ldots\ldots\ldots 9}a^{-(m+9)}b^9.$

28) von $(a^4b^2-x^3)^9$ das 8te Glied?
Antw. $-36a^8b^4x^{21}.$

29) von $\sqrt{1-2x}$ das 6te Glied?

Antw. $-\frac{7}{8}x^5$.

30) von $\sqrt[m]{a+b}$ das 7te Glied?

Antw. $+\frac{(1-5m)(1-4m)(1-3m)(1-2m)(1-m)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\ 5.\quad 6m^6}a^{\frac{1}{m}-6}b^6$.

31) von $a\sqrt[6]{1+p}$ das 5te Glied?

Antw. $-\frac{935}{31104}ap^4$.

32) von $\sqrt[10]{(a+x)^7}$ das 4te Glied?

Antw. $+\frac{91}{2000}a^{-3}x^3\sqrt[10]{a^7}$.

IV. Abschnitt.

Ueber die Gleichungen vom ersten und zweiten Grade.

§. 17. Ueber Gleichungen vom ersten Grade.

A. Mit einer unbekannten Größe.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter einer Gleichung überhaupt, und was insbesondere unter einer synthetischen?

2. Was nennt man Gleichungsseiten; wie viele muß eine jede Gleichung haben?

3. Wann besteht eine Gleichungsseite aus Gliedern; und aus wie vielen kann jede Seite bestehen?

4. Wie heißt eine Gleichung, wenn deren eine Gleichungsseite Null ist; welche formelle Operation wird sodann durch die andere Gleichungsseite vorgestellt?

5. Was versteht man unter den bekannten, was unter den unbekannten Größen einer Gleichung? — Wodurch pflegt man im Schreiben die einen von den andern zu unterscheiden? Wann hat man also eine Gleichung mit einer Unbekannten?

6. Wann kann man mit Bestimmtheit über den Grad einer Gleichung urtheilen? — Wann gehört nun dieselbe zu den Gleichungen vom ersten Grade?

7. Was versteht man unter dem Reduciren einer Gleichung? Wie wird die reducirte Gleichung mit der zu reducirenden jedesmal verbunden?

8. Was versteht man unter dem Reduciren einer Gleichungsseite? — Wie wird oft die reducirte Gleichungsseite mit der zu reducirenden verbunden? — Gibt es also auch Gleichungen, welche aus drei und mehreren Seiten bestehen?

9. Wann muß beim Reduciren a) das Addiren, b) das Subtrahiren, c) das Multipliciren, d) das Dividiren, e) das Potenziren und f) das Radiciren in Anwendung kommen; — und wie?

10. Welche Nenner, wenn in einer Gleichung sowohl ein= als auch mehrtheilige vorkommen, sollen zum Vortheile der Rechnung zuerst hinweggeschafft werden?

11. Was hat man zu thun, wenn dieselbe Unbekannte in jedem Gliede ein= oder mehrmal als Faktor vorkommt? — Was dann, wenn sie nur in einigen Gliedern vorkommt und namentlich Buchstaben zu Coefficienten hat?

12. Wie hat man die Gleichungen zu ordnen, wenn Wurzelgrößen weggeschafft werden sollen?

13. Können alle Wurzelgrößen, wenn deren mehrere als Glieder vorkommen, auf einmal verschwinden? — Welche von den Wurzelgrößen kann man zuerst entfernen, wenn sie ungleichnamig sind?

14. Wann ist eine Gleichung aufgelöst, und wie überzeugt man sich von der Richtigkeit der Auflösung?

15. Wann wird die Auflösung auf direkte, wann auf indirekte Weise bewerkstelliget? — In welchen besondern Fällen ist die letztere Auflösungsart zu wählen, und warum?

16. Welche frühern Regeln finden hier Anwendung?

17. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $\frac{4x-2}{7}=1-3x$

$28x-14=7-21x,$

2) $\frac{b-2x}{8}=ax-\frac{m-x}{2}$

$b-2x=ax-4m-4x,$

3) $\frac{5-2.(x-3)}{2}+\frac{x}{5}=3$

$25-10.(5x-15)+2x=30,$

4) $a-b.\frac{a-4}{2x}=8-\frac{a-3x}{4}$

$4ax-4bx.a-4=32x-ax-3x^2,$

5) $\frac{7-4x}{3}-\frac{x-8}{4-5x}=\frac{6x+2}{10}$

$\frac{28+20x^2}{3}-x-8=\frac{24x-10x}{10},$

6) $\frac{3}{5-\sqrt{x}}=4-2x$

$\frac{3}{5}=-4\sqrt{x}+2x\sqrt{x},$

7) $a+3\sqrt{x}=2b$

$(a)^2+(3\sqrt{x})^2=(2b)^2,$

8) $\sqrt{a}=\sqrt{a+\sqrt{b-\sqrt{x}}}$

$a=(a+\sqrt{b-\sqrt{x}})^2,$

9) $\sqrt{3a}-x=b\sqrt{4-a}$

$3a-2\sqrt{3a}\,.\,x+x^2=b^2\,.\,4-a,$

10) $2x-3\sqrt{4-2x}=3$

$4x^2-8x^2\,.\,3\sqrt{4-2x}-9(4-2x)=9,$

11) $2\sqrt{1-3x}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{7x-3}$

$4(1-3x)=\frac{1}{8}(7x-3),$

12) $x^{\sqrt{m}}=b$

$x^m=b^2$

gefehlt? — Wie heißen a) die reducirten Gleichungen dann, wenn richtig operirt wird, und b) wie müßten die zu reducirenden oder gegebenen Gleichungen umgeändert werden, damit aus ihnen die obigen reducirten Gleichungen sich wirklich ergeben könnten?

b. Aufgaben.

1) $x+a=b$, woraus $x=b-a$.

2) $x-a=b+c$, woraus $x=a+b+c$.

3) $ax=ab+c$, woraus $x=b+\frac{c}{a}$.

4) $\frac{x}{a}=b+c$, woraus $x=ab+ac$.

5) $ax+bx=c$

$x=\frac{c}{a+b}$.

6) $4x^2+3x=15x$

$x=3$.

7) $3x-4=2x+11$

$x=15$.

8) $8x-(1+2x)=10x+5$

$x=-\frac{3}{2}$.

9) $36x-216+24x+144=72x$

$x=-6$.

10) $3x-5x^2=7x-14x$

$x=2$.

11) $\frac{2x-10}{7}=0$

$x=5$.

12) $5x-\frac{x+2}{2}=71$

$x=16$.

13) $\frac{3x}{4}-11=\frac{x-8}{2}$

$x=28$.

14) $x-\frac{3-x}{3}=5\frac{2}{3}$

$x=5$.

15) $\frac{a}{x} - a = \frac{b}{2x} - \frac{1}{2}b$

$x = 1.$

16) $\frac{12+x}{x} - 5 = \frac{6}{x}$

$x = 1\frac{1}{2}.$

17) $7x^m - \frac{3}{2}x^{m+1} = 3x^m + \frac{1}{2}x^{m+1}$

$x = 2.$

18) $\frac{ax-b}{c} + a = \frac{x+ac}{c}$

$x = \frac{b}{a-1}.$

19) $(a+x+b)(a+b-x) = (a+x)(b-x) - ab$

$x = \frac{(a+b)^2}{b-a}.$

20) $ax - \frac{3a-bx}{2} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{3a+1}{2a+b}.$

21) $\frac{3x+5.(8-x)}{3} = 11$

$x = 3\frac{1}{2}.$

22) $\frac{5-2x}{4}+2=x-\frac{6x-8}{2}$

$x=\frac{1}{2}$.

23) $2{,}4x-10\frac{6}{8}=\frac{1}{4}x$

$x=5$.

24) $\frac{3.(x-1)}{2}+8=5\frac{1}{2}.(1-x)$

$x=-\frac{1}{7}$.

25) $\frac{3x-5}{8}+x^2=1-\frac{1-2x^2}{2}$

$x=3$.

26) $6:\frac{4a}{5x}-\frac{10x-1}{3a}=\frac{17}{a}$

$x=4$.

27) $0{,}5x+2-\frac{3}{4}x=0{,}4x-11$

$x=20$.

28) $(a-x)(a+x)=2a^2+2ax-x^2$

$x=-\frac{a}{2}$.

29) $(a^2-x)(a^2+x)=a^4+2ax-x^2$

$x=0$.

30) $(a^2+x)(a^2+x)=x^2+4a^2+a^4$

$x=2$.

31) $6a-\frac{4ax-2b}{3}=x$

$x=\frac{18a+2b}{4a+3}.$

32) $\frac{4{,}05}{9x}+3\frac{7}{8}=4\frac{1}{40}$

$x=3.$

33) $5.(2x-3)(3-2x)=4x.\left(11\frac{1}{4}-5x\right)$

$x=3.$

34) $ax-\frac{bx+1}{x}=\frac{a(x^2-1)}{x}$

$x=\frac{a-1}{b}.$

35) $\frac{mx^2}{-p}=mqx-\frac{m(p^2x+x^3)}{px}$

$x=\frac{p}{q}.$

36) $2\frac{1}{3}x-50=3\frac{5}{6}x-95$

$x=30.$

37) $\frac{x}{a}-b=\frac{c}{d}-x$

$x=\frac{abd+ac}{ad+d}.$

38) $2\frac{1}{2}x-1\frac{1}{4}x=2\frac{1}{4}-\frac{3-x}{2}$

$x=1.$

39) $3{,}5x-\frac{40-10x}{2}=30\frac{1}{4}x+1\frac{3}{4}$

$x=-1.$

40) $2x^3-\frac{3}{2}x^2=5\frac{1}{2}x^2-\frac{8x^3-x^2}{5}$

$x=2.$

41) $\frac{14x-5}{3}=\frac{9x+3}{4}$

$x=1.$

42) $\frac{3-2x}{7}+1=4x+\frac{42-4x}{5}$

$x=-2.$

43) $\frac{204x-4}{6}+\frac{x}{5}=40+26\frac{1}{15}x$

$x=5.$

44) $2\frac{1}{6}x=\frac{x^2+3x}{4}-\frac{4{,}5x-\frac{1}{2}x^2}{3}$

$x=7.$

45) $2x-\frac{5x-4}{6}=7-\frac{1-2x}{5}$

$x=8.$

46) $\frac{x^2-a}{bx}-\frac{a-x}{b}=\frac{2x}{b}-\frac{a}{x}$

$x=b-1.$

47) $\frac{3}{c}-\frac{ab-x^2}{bx}=\frac{4x-ac}{cx}$

$x=\frac{b}{c}.$

48) $\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{6}x^2+(4-x).x=0$

$x=-8.$

49) $\frac{2}{3}x-5=3\frac{1}{5}(x-1)-24\frac{3}{5}$

$x=9.$

50) $\frac{3}{4}x-\frac{2+\frac{1}{2}x}{5}=x-3,9$

$x=10.$

51) $\frac{7-x}{8}+9\frac{1}{2}=10,5-\frac{3}{8}x$

$x=\frac{1}{2}.$

52) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{10}x+\frac{1}{20}x=40$

$x=100.$

53) $3\frac{1}{2}.\frac{x+2}{7}=\frac{14}{9}-\frac{3+5x}{4}$

$x=-\frac{1}{9}.$

54) $\frac{x-1\frac{1}{2}}{10}-\frac{11x-3}{18}+5\frac{1}{20}=\frac{9-\frac{1}{2}x}{3}$

$x=6.$

55) $2\frac{1}{4}x+43\frac{1}{2}=3\frac{5}{8}x-\frac{3-x}{2}$

$x=24.$

56) $\frac{15x}{4}-\frac{2x-1}{3}=\frac{23}{32}$

$x=\frac{1}{8}$.

57) $\frac{7}{8}x+\frac{1}{7}=95\frac{1}{7}-\frac{3}{8}x$

$x=76$.

58) $2\frac{1}{2}+\frac{18-x}{3}=1\frac{2}{9}x-\frac{1}{3}-\frac{2x-3}{10}+\frac{2}{5}$

$x=6$.

59) $\frac{3}{4}x-\frac{2-\frac{1}{2}x}{5}=3x-26\frac{1}{5}$

$x=12$.

60) $\frac{3x+5\frac{1}{3}}{8}+x^2=1-\frac{1-2x^2}{3}$

$x=-1\frac{1}{8}$.

61) $5x^2-\frac{2x+3\frac{1}{2}}{3}\times x=1\frac{5}{14}x-\frac{(3-x)x}{7}$

$x=\frac{1}{2}$.

62) $2{,}5x-\frac{2+x}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}-2\right)=0{,}5-\frac{5x+3}{8}$

$x=-\frac{1}{9}$.

63) $\frac{8{,}5}{2}+\frac{0{,}2}{x}=4\frac{1}{4}-\frac{1-0{,}1x}{x}$

$x=12$.

64) $\frac{0{,}48x}{6}-\frac{3-4x}{0{,}2}=1993$

$x=100.$

65) $2\frac{3}{4}-\frac{3}{x}=\frac{1}{x}-3{,}25$

$x=\frac{2}{3}.$

66) $1-3\frac{1}{2}(0{,}4x-2)+\frac{2\frac{1}{3}x}{3}=1\frac{7}{9}$

$x=10.$

67) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-\frac{5}{6}x-12=1\frac{2}{3}x-58$

$x=24.$

68) $\frac{3}{4}x-\frac{2+x}{6}-1=\frac{2}{3}x$

$x=-16.$

69) $2-\left(3-\frac{4x-1}{5}\right)+\frac{x}{2}=0{,}4-\frac{1-x}{5}$

$x=1\frac{3}{11}.$

70) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=15-\frac{x}{6}$

$x=12.$

71) $\frac{5x+3}{8}-\frac{3-4x}{3}+\frac{1}{2}x=15\frac{1}{2}-\frac{9-5x}{6}$

$x=9.$

72) $5-x.\left(3\frac{1}{2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}x-\frac{3x-(4-5x)}{4}$

$x=3.$

73) $\frac{3-x}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{5\frac{1}{2}x}{3x^2}=\frac{67}{20x^2}-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3x^2}{5x^3}\right)$

$x=\frac{3}{2}.$

74) $\frac{2-3x}{1,5}+\frac{5x}{1,25}-\frac{2x-3}{9}=\frac{x-2}{1,8}+2\frac{7}{9}$

$x=0.$

75) $\frac{24,08}{x}+\frac{1}{x}.0,04(x+0,9)=241,2$

$x=0,1.$

76) $\frac{2x-4}{8}+0,2x=5-\frac{12-0,5x}{7}$

$x=10.$

77) $\frac{3x^2}{0,04}-\frac{2x-\frac{1}{5}x^2}{3-4,125}-\frac{x}{3}=75\frac{1}{360}x^2$

$x=8.$

78) $\left(4x-3\left(8-3x-\left(2-2\frac{1}{2}x\right)\right)\right)\times\frac{2}{19}=1$

$x=5.$

79) $\frac{ab+x}{b^2}-\frac{b^2-x}{a^2b}=\frac{x-b}{a^2}-\frac{ab-x}{b^2}$

$x=\frac{2a^3}{b-1}.$

80) $\frac{3ax-2b}{3b}-\frac{ax-a}{2b}=\frac{ax}{b}-\frac{2}{3}$

$x=1.$

81) $am-b-\frac{ax}{b}+\frac{x}{m}=0$

$x=bm.$

82) $xy^2-\frac{2-x}{3}y^2=5\frac{2}{3}y^2$

$x=4\frac{3}{4}.$

83) $\frac{x^{\frac{1}{2}}.(ac+x^2)}{bx}=cx^{0,5}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{b}\times x$

$x=\frac{a}{b}.$

84) $3\frac{1}{5}x^m-\frac{4\frac{1}{2}x^m-x^{m+1}}{8}=2{,}7x^m$

$x=\frac{1}{2}.$

85) $\frac{2a^2b^3}{(a+b)^3}-\frac{b^2x}{a(a+b)}+\frac{3a^2c}{a+b}=\frac{3acx}{b}-\frac{b^3-2ab^2x}{(a+b)^2}$

$x=\frac{ab}{a+b}.$

86) $\frac{4x^m}{x+1}=5x^m$

$x=-\frac{1}{5}.$

87) $\frac{ax^2}{b-cx}+a+\frac{ax}{c}=0$

$x=\frac{bc}{c^2-b}$.

88) $\frac{5x^m}{4}-\frac{3x^{-(1-m)}}{4}.x^2=\frac{x^m}{16}.(5-30x)$

$x=-\frac{5}{6}$.

89) $\frac{1-2x}{3}+\frac{1\frac{1}{3}x^2}{3x+2}=-\frac{2x+9}{9}$

$x=-\frac{6}{7}$.

90) $0{,}5-\frac{3{,}5x}{x-2}-\frac{24-3x}{8}=0{,}375x$

$x=\frac{5}{6}$.

91) $\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{x^2}{1-x^2}$

$x=4$.

92) $\frac{1}{1-x}+\frac{4+4x}{1+x}=\frac{4{,}5x}{x-x^2}$

$x=\frac{1}{8}$.

93) $\frac{4}{x-8}+\frac{3}{2x-16}-1\frac{5}{24}=\frac{2}{3x-24}$

$x=12$.

94) $x-\frac{2x^2-3{,}6}{2x+3}=1{,}8-\frac{7x+9}{20x+15}$

$x=3$.

95) $\frac{2x^2}{2x-1}-1-\frac{1-2x}{3}=\frac{3\frac{1}{3}x^2}{2x-1}-\frac{1,5x}{x-\frac{1}{2}}-\frac{4}{6x-3}$

$x=8.$

96) $\frac{x^4-(4x^2-20x+24)}{x^2-2x+4}=x^2+2x-4$

$x=2.$

97) $\frac{2x^4+2x^3-9x^2+12}{x^2+3x-4}=2x^2-4x-3$

$x=\frac{1}{2}.$

98) $2x^2-(5-4x)=-\frac{2x^4-2x^3-14x^2+x+2,5}{3x-x^2-1,5}$

$x=\frac{1}{2}.$

99) $\frac{\frac{1}{4}x-1}{4x^2-3x-1\frac{5}{8}}=\frac{1}{16x}$

$x=\frac{1}{8}.$

100) $\frac{1}{x^3-2ax^2+a^2x+1}=\frac{4ax-5x^2}{4a^3x^2-13a^2x^3+14ax^4-5x^5+8ax^2-10x^3}$

$x=\frac{1}{2}.$

101) $\sqrt[m]{x\pm a}=b$

$x=b^m\mp a.$

102) $\sqrt[3]{4x-16}=2$

$x=6.$

103) $\frac{1}{5}\sqrt{3x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{x-1}=0$

$x=10.$

104) $20-3\sqrt{x}=2$

$x=36.$

105) $b+c\sqrt{x}=a$

$x=\left(\frac{a-b}{c}\right)^2.$

106) $\frac{\sqrt{a^2-x}}{a^2-x}=\frac{a^2+x}{\sqrt{a^2-x}}$

$x=1-a^2.$

107) $\frac{x-\sqrt{5}}{2x}=\frac{x-10}{2x+\sqrt{20}}$

$x=\frac{1}{2}.$

108) $\sqrt{5-x}-\sqrt{-x}=\frac{3}{\sqrt{5-x}}$

$x=-4.$

109) $\sqrt[m]{a-x}=\sqrt[2m]{a+x^2-4ax}$

$x=\frac{1-a}{2}.$

110) $\sqrt{6+x}=\sqrt[4]{x^2+30x-18}$

$x=3.$

111) $\sqrt{\frac{1+x}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt[6]{x^3+3x^2+90x-608}$

$x=7.$

112) $\sqrt{\frac{a+b}{c-x}}=\sqrt[3]{a+b}$

$x=c-\sqrt[3]{a+b}.$

113) $\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{\frac{48}{1+x}}$

$x=2.$

114) $\sqrt[m]{\sqrt[3]{-(a^2+c)}}=\sqrt[4]{\sqrt[m]{\frac{a^2+c}{d(g-x)}}}$

$x=g-\frac{1}{d\sqrt[3]{a^2+c}}.$

115) $\sqrt[m]{a-x}=\sqrt[3m]{(a-x)(x^2+ax+4a^2)}$

$x=-a.$

116) $2+\sqrt[3]{4\left(2-\sqrt{4-\frac{x}{4}}\right)}=0$

$x=-48.$

117) $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{x}}}}}{2}$

$x=4.$

118) $a\sqrt[5]{\frac{1}{2}x^2.\frac{2m-2}{ax}}=a^2m\sqrt[5]{m-1}$

$x=a^6m^5.$

119) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})=1+\sqrt{x}-3x$

$x=\frac{1}{4}.$

120) $(-0{,}2)^2 \cdot x - \frac{4-x^2}{2+x} + 3\frac{1}{5} \cdot \frac{x^{0,5}}{x^{-1}\sqrt{x}} = -6{,}24$

$x = -1.$

121) $\frac{2x}{\sqrt{49x^{-4}}} - \frac{2}{3^{\frac{1}{2}}} = 4 \cdot (-7)^{-1} - \frac{1{,}5x^3 + 0{,}5\sqrt{x^7}}{7 \cdot (-1)^{2m-1}}$

$x = 1.$

122) $\frac{1}{4}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{16x} + \frac{1}{3}\sqrt{4x} + \frac{1}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{4}x}$

$x = \frac{72}{425}.$

123) $\sqrt{16x} + \frac{1}{3}\sqrt{4x} - 8\sqrt{\frac{1}{9}x} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-0{,}25x}{0{,}75}} = 0$

$x = \frac{4}{49}.$

124) $\frac{1}{4}x\sqrt{45} - 6x\sqrt{\frac{5}{4}} = \left(\frac{3}{4}x + 9\right)\sqrt{5}$

$x = -3.$

125) $(1+\sqrt{x})(2-\sqrt{x}) = \frac{4+3\sqrt{x}}{2}$

$x = \frac{1}{4}.$

126) $\sqrt{a+x} - \sqrt{x} = \frac{4a}{\sqrt{a+x}}$

$x = \frac{9a}{7}.$

127) $(1 - \frac{3}{2}\sqrt{x})(2 - 1{,}5\sqrt{x}) = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$x = 7\frac{1}{9}.$

128) $\dfrac{3\sqrt{3x}-\sqrt{4x}+\sqrt{2x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=1\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-1$

$x=1.$

129) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}:\left(2-3\sqrt{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{10}$

$x=16.$

130) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}:\left(\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{10}$

$x=2.$

131) $\frac{3}{5}\sqrt{b+x}-0{,}8\sqrt{x}=\sqrt{b+x}$

$x=\frac{1}{3}b.$

132) $a-\sqrt{x-a}=\sqrt{x}$

$x=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2.$

133) $\sqrt{4x-15}=2\sqrt{x}-1$

$x=16.$

134) $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=\frac{1}{2}a$

$x=\left(\frac{a+4}{4}\right)^2.$

135) $\sqrt{1+x}=\sqrt{\frac{1}{2}x+1}$

$x=8.$

136) $3x-\sqrt{9x^2-40x-8}=8$

$x=9.$

137) $\sqrt{x-1}=\sqrt{x+4}-3$

$x=1\frac{4}{9}$.

138) $1+\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x+4}$

$x=8$.

139) $1-\sqrt{1-3x}=2\sqrt{1-x}$

$x=-8$.

140) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9}-\frac{1}{2}x^2=x$

$x=1\frac{1}{4}$.

141) $\frac{1}{4}\sqrt{x+8}+4\frac{1}{12}\sqrt{x}+1\frac{2}{3}\sqrt{x}=0$

$x=\frac{1}{66}$.

142) $\frac{1}{2}\sqrt{9x}+\frac{1}{3}\sqrt{x}=6\frac{1}{3}\sqrt{5-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sqrt{x}}$

$x=16$.

143) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}+3=0$

$x=5$.

144) $\frac{8\frac{1}{3}}{14}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{4x^2}-x^{-1}}=\frac{5}{2}\left(x^{-1}+\frac{5}{21}\right)$

$x=\frac{3}{4}$.

145) $5\sqrt[3]{8x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{27x}-\frac{0,05}{5x}\sqrt[3]{x^4}=114,9$

$x=1000$.

146) $1=\sqrt{\frac{x+36}{x-9}}-\frac{3}{\sqrt{\frac{1}{9}x-1}}$

$x=13.$

147) $1=\sqrt{\frac{9x+4}{9x-1}}-3\sqrt{\frac{1}{9x-1}}$

$x=\frac{13}{81}.$

148) $8\frac{1}{3}\sqrt{12x}-2\frac{1}{3}\sqrt{9x+36}=2\frac{6}{7}\sqrt{147x}-2\sqrt{48x}$

$x=12.$

149) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x}=\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

$x=2.$

150) $\frac{x^2}{x-3}+\frac{9}{3-x}=\sqrt{10+6x+\sqrt{x^4-8x^3+1}}$

$x=\frac{1}{4}.$

151) $\frac{\sqrt{ax}+b}{x+b}=\frac{b-a}{b-\sqrt{ax}}$

$x=a.$

152) $\sqrt{x}+\sqrt{3a+x}-\frac{9a}{\sqrt{3a+x}}=0$

$x=2\frac{2}{5}a.$

153) $3\frac{2}{3}\sqrt[-3]{\frac{54}{2x^3}}-x\sqrt{4x^{-2}}=2\frac{47}{63}-\frac{8-4x}{5,25}$

$x=7.$

154) $\frac{x}{b^2}-\frac{a^2-x^2}{a+x}+\frac{a^4x^{0,5}}{b\sqrt{x^{-1}}}=ab(a^4+b)$

$x=ab^2.$

155) $\frac{1}{3}\sqrt{5-x}+\frac{1}{2}\sqrt{80-16x}=3\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{7}{9}-\frac{1}{3}x}$

$x=4.$

156) $x\sqrt{\frac{a-m}{x}}+\sqrt[3]{x^2}=0$

$x=(a-m)^3.$

157) $1-\sqrt{x}=\sqrt[3]{2-(x+3)\sqrt{x}}$

$x=\frac{1}{3}.$

158) $\sqrt[3]{3x-(6+x)\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}$

$x=\frac{1}{9}.$

159) $8\sqrt[3]{4+x}=1+5.(1+\sqrt[3]{4+x})$

$x=4.$

160) $\frac{\sqrt{a\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}=\frac{a\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[3]{a^2}}{2a\sqrt{a}-\sqrt[3]{8a}}$

$x=a^2,$

B. Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen?

2. Wann muß sich für eine jede Unbekannte ein bestimmter Werth ergeben; und wann nicht? — Aus wie vielen wesentlich verschiedenen Gleichungen höchstens kann eine unbestimmte Aufgabe mit n unbekannten Größen bestehen?

3. Was versteht man unter der Endgleichung? — Wie viele verschiedene Gleichungen gehen ihr z. B. bei einer bestimmten Aufgabe mit 4 unbekannten Größen voraus? — Wie hat man diese Gleichungen zu bezeichnen?

4. Durch wie vielerlei Methoden kann man direkte zu der Endgleichung gelangen? — Worin besteht das einer jeden von diesen Methoden eigenthümliche Verfahren?

5. Kann eine jede Methode bei jeder Aufgabe und mit gleichem Vortheile gebraucht werden?

6. Soll man vor oder nach dem Reduciren zur Anwendung einer von diesen Methoden schreiten?

7. Wann hat man eine indirekte Verfahrungsweise zu wählen?

8. Wie macht man die Probe, und an welcher von den gegebenen Gleichungen?

9. Welche frühern Regeln kommen auch hier wieder in Anwendung?

b. Aufgaben.

1) $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$

$x=\frac{a+b}{2}$ und $y=\frac{a-b}{2}$.

2) $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+fy=c^2 \end{cases}$

$x=\frac{c(f-bc)}{af-bd}$ und $y=\frac{c(ac-d)}{af-bd}$.

3) $\begin{cases} 7x+\frac{5}{2}y=413 \\ 39x=14y-1609 \end{cases}$

$x=9$ und $y=140$.

4) $\begin{cases} 6x+4y=236 \\ 3x+15y=573 \end{cases}$

$x=16$ und $y=35$.

5) $\begin{cases} 2\frac{1}{2}y-4\frac{1}{4}=3\frac{1}{2}x-22 \\ x-y=\frac{5}{14} \end{cases}$

$x=16\frac{6}{7}$ und $y=16\frac{1}{2}$.

6) $\begin{cases} 3\frac{1}{4}x-2\frac{1}{3}y=2\frac{2}{3} \\ 4{,}4x+1{,}5y=50{,}2 \end{cases}$

$x=8$ und $y=10$.

7) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=10 \\ \frac{3}{y}+\frac{4}{x}=20 \end{cases}$

$x=\frac{1}{2}$ und $y=\frac{1}{4}$.

8) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=a \\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=b \end{cases}$

$x=\frac{1}{b-2a}$ und $y=\frac{2}{3a-b}$.

9) $\begin{cases} 3x-\frac{1}{y}=10 \\ 5y=2-\frac{5-xy}{4} \end{cases}$

$x=5$ und $y=\frac{1}{5}$.

10) $\begin{cases} b=a-\frac{a^2-b^2-x+a-b}{y} \\ ax+2ab^2-aby=(1-b)(a^2-ab) \end{cases}$

$x=a-b$ und $y=a+b$.

11) $\begin{cases} x+\frac{x+21}{y-10}=50-\frac{141-3x}{3} \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=28 \end{cases}$

$x=39$ und $y=30$.

12) $\begin{cases} 0{,}2x - \dfrac{3{,}2-4y}{5} = x + 0{,}16 \\ \dfrac{1{,}2y}{0{,}3} - \dfrac{2{,}5x+1}{y+0{,}6} = 4y - 1\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$x=2$ und $y=3$.

13) $\begin{cases} (y-1{,}7)(x+2) = (x+0{,}2)\left(\dfrac{1}{4}+y\right) + 1\dfrac{7}{20} \\ \dfrac{x}{y-3} = 1 \end{cases}$

$x=4$ und $y=7$.

14) $\begin{cases} x+10{,}5 = 2y - 6 + 2x \\ (x-5)(y+6) = (x+3)(y-4) - 49 \end{cases}$

$x=2\dfrac{1}{2}$ und $y=7$.

15) $\begin{cases} 5p^2x \cdot \left(\dfrac{y-\frac{1}{3}p}{2p}\right)^{-1} = \dfrac{5p^4}{p-2-\frac{1}{3}p^2} \\ \dfrac{p-x^{-1}y}{3} = \dfrac{p^2-2p+4}{3p} \end{cases}$

$x=\dfrac{1}{2}$ und $y=1-\dfrac{2}{p}$.

16) $\begin{cases} y+\sqrt{x} = 1 \\ 2x - 46 = 2y^2 \end{cases}$

$x=144$ und $y=-11$.

17) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = a \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3\sqrt{y}} = b \end{cases}$

$x=\left(\dfrac{4}{a+6b}\right)^2$ und $y=\left(\dfrac{8}{3a-6b}\right)^2$.

18) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{a}{b} \\ \frac{ax-b}{y}=\frac{1}{a} \end{cases}$

$x=\frac{a^3b}{a^4-b^2}$ und $y=\frac{ab^3}{a^4-b^2}$.

19) $\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{4x^2+9(x+y)-245}=\sqrt{9x^2+7(x+y)+98} \\ 4x-0{,}6\ y=81 \end{cases}$

$x=24$ und $y=25$.

20) $\begin{cases} 0{,}4\sqrt{x+y^2+16}=\frac{5-0{,}1y}{0{,}25}+0{,}8 \\ \frac{1}{2\sqrt{10-y}}-\frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4}x}}=0 \end{cases}$

$x=-16$ und $y=26$.

21) $\begin{cases} \frac{x.(1-\sqrt{y})}{1-y}=3\sqrt{y}-3 \\ \frac{6y}{5-\sqrt{7x}}=3.(5+\sqrt{7x}) \end{cases}$

$x=3$ und $y=2$; auch $x=3\frac{2}{7}$ und $y=1$.

22) $\begin{cases} \sqrt{x-y+1}=\sqrt{\frac{1}{2}x+y-8} \\ 3x-8=3\sqrt{x^2-7y+13}-2 \end{cases}$

$x=10$ und $y=7$.

23) $\begin{cases} 5x+7y-2z=13 \\ 8x+3y+z=17 \\ x-4y+10z=23 \end{cases}$

$x=1$; $y=2$ und $z=3$.

24) $\begin{cases} 5x+3y-6z=4 \\ 3x-y+2z=8 \\ x-2y+2z=2 \end{cases}$

$x=2$; $y=2$ und $z=2$.

25) $\begin{cases} 5x-3y+2z=21 \\ 8x-y-3z=3 \\ 2x+3y+2z=39 \end{cases}$

$x=4$; $y=5$ und $z=8$.

26) $\begin{cases} x+y+z=30 \\ 8x+4y+2z=50 \\ 27x+9y+3z=64 \end{cases}$

$x=\frac{2}{3}$; $y=-7$ und $z=36\frac{1}{3}$.

27) $\begin{cases} x-y+2z=16 \\ 3x+2y+\frac{1}{4}z=15 \\ \frac{1}{2}x-3y+z=13 \end{cases}$

$x=6$; $y=-2$ und $z=4$.

28) $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-2y+z=7 \\ \frac{1}{2}x+y-\frac{1}{5}z=4 \end{cases}$

$x=4\frac{8}{11}$; $y=1\frac{10}{11}$ und $z=1\frac{4}{11}$.

29) $\begin{cases} x-y+2z=12 \\ 3x+2y-\frac{1}{4}z=1 \\ \frac{1}{2}x-3y+z=11 \end{cases}$

$x=2$; $y=-2$ und $z=4$.

30) $\begin{cases} 2x-\frac{1}{2}y+4z=13 \\ \frac{5}{4}x+y-z=0{,}25 \\ 3x+4y-\frac{2{,}5z}{3}=8\frac{1}{2} \end{cases}$

$x=1$; $y=2$ und $z=3$.

31) $\begin{cases} 3x-\frac{1}{4}y+z=7\frac{1}{2} \\ 2x-\frac{y-3z}{3}=5\frac{1}{3} \\ 2x-\frac{1}{2}y+4z=11 \end{cases}$

$x=y=z=2$.

32) $\begin{cases} y+9z=189-2x \\ 7y+4x=68 \\ 3x-\frac{z-30}{6}=-\frac{1}{3}x \end{cases}$

$x=-\frac{1}{2}$; $y=10$ und $z=20$.

33) $$\begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{a}{y}=b \\ \frac{b}{x}-\frac{b}{y}=c \\ \frac{c}{x}+\frac{c}{z}=d \end{cases}$$

$x=\frac{2ab}{b^2+ac}$; $y=\frac{2ab}{b^2-ac}$ und $z=\frac{2abc}{2abd-b^2c-ac^2}$.

34) $$\begin{cases} ax+\frac{y}{a}-az=\frac{1}{a} \\ \frac{x}{b}+by-bz=\frac{1}{b} \\ x-y+\frac{z}{c}=\frac{1}{c} \end{cases}$$

$x=y=z=1$.

35) $$\begin{cases} x+y=82 \\ 2x+\frac{1}{2}z=120 \\ 2y+\frac{2}{5}z=8 \end{cases}$$

$x=70$; $y=12$ und $z=-40$.

36) $$\begin{cases} x+2y=a \\ 2y+3z=b \\ x+3z=c \end{cases}$$

$x=\frac{a+c-b}{2}$; $y=\frac{a+b-c}{4}$ und $z=\frac{b+c-a}{6}$.

37) $\begin{cases} 26\frac{1}{2}-\frac{x+z}{4}+54\frac{1}{2}=\frac{1}{2}y \\ z=1\frac{1}{4}y \\ \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}y\right)=26 \end{cases}$

$x=64$; $y=80$ und $z=100$.

38) $\begin{cases} x+y+z=24 \\ z-x=2 \\ z-y=1 \end{cases}$

$x=7$; $y=8$ und $z=9$.

39)* $\begin{cases} 4x-5y+2z=6 \\ 2x+3y-z=20 \\ 8x-10y+4z=12 \end{cases}$

$x=5$; $y=6$ und $z=8$.

40)* $\begin{cases} \frac{12}{x+y}=2\frac{2}{5} \\ \frac{1}{x-z}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{y+z}=\frac{1}{3} \end{cases}$

$x=0$; $y=5$ und $x=-2$.

41) $\begin{cases} 2x-\frac{13x-8}{3y-2}=1\frac{5}{7} \\ y-\frac{2x-z}{6x-12}=2\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2}y-3z=4\frac{1}{2} \end{cases}$

$x=4$; $y=3$ und $z=2$.

42) $\begin{cases} \frac{x}{bc}+\frac{y}{ac}+\frac{z}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \\ b^2x-b=ab^2-y \\ \frac{y}{bx+z}=\frac{b}{ab+c} \end{cases}$

$x=a$; $y=b$ und $z=c$.

43) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 4y=ax \\ 5z=bx \end{cases}$

$x=\frac{60}{20+5a+4b}$; $y=\frac{15a}{20+5a+4b}$ und $z=\frac{12b}{20+5a+4b}$.

44) $\begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m \\ \frac{a}{x}+\frac{c}{z}=n \\ \frac{b}{x}+\frac{c}{z}=q \end{cases}$

$x=\frac{a-b}{n-q}$; $y=\frac{b(a-b)}{aq+am-bm-an}$ und $z=\frac{c(a-b)}{aq-bn}$.

45) $\begin{cases} xy=36 \\ xz=72 \\ yz=18 \end{cases}$

$x=12$; $y=3$ und $z=6$.

46) $$\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=\frac{1}{2}=a \\ \frac{xz}{x+z}=\frac{1}{4}=b \\ \frac{yz}{y+z}=\frac{1}{8}=c \end{cases}$$

$x=-1$; $y=\frac{1}{3}$ und $z=\frac{1}{5}$ und allgemein

$$x=\frac{2abc}{bc-ab+ac};\ y=\frac{2abc}{ab+bc-ac} \text{ und } z=\frac{2abc}{ab+ac-bc}.$$

47) $$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y-z+5}=2 \\ \sqrt{2x-y+z}+2=5 \\ \frac{x+y}{\sqrt{x+y}}=0{,}4\sqrt{10z} \end{cases}$$

$x=4$; $y=4$ und $z=5$.

48) $$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1=a \\ \sqrt{x}+\sqrt{z}=3\frac{1}{2}=b \\ \sqrt{y}+\sqrt{z}=-1\frac{1}{2}=c \end{cases}$$

$x=9$; $y=4$ und $z=\frac{1}{4}$ und allgemein

$$x=\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2;\ y=\left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 \text{ und } z=\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2.$$

49) $$\begin{cases} \sqrt[4]{4(x+y+z+4)}=2\sqrt[4]{3x+y-z-4} \\ \sqrt{\dfrac{x+y+z-35}{4}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{x+y+z}{4}\right)^2-\dfrac{15}{4}(y+z)+\dfrac{25}{16}} \\ \sqrt[-2]{z-x-4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{y}} \end{cases}$$

$x=10$; $y=20$ und $z=30$.

50) $$\begin{cases} x+y+z+w=10 \\ 5x+4y+3z+2w=30 \\ 15x+10y+6z+3w=65 \\ 35x+20y+16z+4w=139 \end{cases}$$

$x=1$; $y=2$; $z=3$ und $w=4$.

51) $$\begin{cases} 2x-3y+4z-w=18 \\ \dfrac{1}{2}x+2y-3z+2w=-14 \\ 6x+4y-7z-6w=7 \\ x+y-3z-4w=2 \end{cases}$$

$x=2$; $y=3$; $z=5$ und $w=-3$.

52) $$\begin{cases} 8x+4y-3z-2w=6 \\ x+3y-z+4w=7 \\ 4x-5y+4z-3w=8 \\ 7x-y+z+10w=9 \end{cases}$$

$x=1$; $y=4$; $z=6$ und $w=0$.

53) $\begin{cases} 3x+4y-z-u=3 \\ 2x-y-2z+2u=9 \\ x+3y+5z-4u=2 \\ 4x-8y-3z+3u=10 \end{cases}$

$x=3$; $y=1$; $z=4$ und $u=6$.

54) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+2y+4z-2w=18 \\ x-2y-z+2w=0 \\ 3x+y+3z-4w=12 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y+z-\frac{3}{4}w=4 \end{cases}$

$x=y=z=w=4$.

55) $\begin{cases} x+y+z+w=5. \\ \frac{2x+y}{3}=\frac{58}{15}-\frac{3z-2w}{5} \\ \frac{4z-3w}{5}=4-\frac{4x-3y}{5} \\ \frac{3x-2y}{4}-\frac{2w-3z}{5}=3\frac{1}{5} \end{cases}$

$x=2$; $y=1$; $z=3$ und $w=-1$.

56) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z-\frac{1}{5}u=78 \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z-\frac{1}{2}u=29 \\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{3}u=64 \\ \frac{1}{5}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{4}u=-17 \end{cases}$

$x=240$; $y=180$; $z=120$ und $u=60$.

§. 18. Ueber Gleichungen vom zweiten Grade.

A. Reinquadratische Gleichungen.

a. Fragen.

1. Wann heißt eine Gleichung quadratisch, und wann ist sie reinquadratisch?

2. Gehört eine Gleichung, in welcher die Unbekannte als Glied eines im Quadrate stehenden Bi- oder Polynomium vorkommt, z. B. $(a-x)^2=b$, auch zu den reinquadratischen? — Wird bei solchen Gleichungen die Auflösung direkt oder indirekt sein?

3. Wann ist in jedem Falle die reinquadratische Gleichung geordnet? — Als was betrachtet man sodann jede Gleichungsseite, und worin muß nun die Auflösung selbst bestehen?

4. Wie viele Werthe oder Wurzeln ergeben sich für eine jede Unbekannte? — Wie müssen diese Werthe beschaffen sein?

5. Wann können Gleichungen von höheren Graden auf ähnliche Weise aufgelöst werden? — Wie heißen darum solche Gleichungen?

6. Wie macht man die Probe? — Was erhält man, wenn für jede von den unten folgenden Aufgaben, bevor man irgend eine Reduction vornimmt, die Probe gemacht, und dabei jede Gleichungsseite für sich reducirt wird?

b. Aufgaben.

1) $7x^2=2268$

$x=\pm 18.$

2) $2x^2-10=214-\frac{3}{2}x^2$

$x=\pm 8.$

3) $1\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{15+x^2}}{\sqrt{x^2-13}}$

$x=\pm 7.$

4) $\frac{0,2x^2-4}{\sqrt{116-x^2}}=\sqrt{116-x^2}$

$x=\pm 10.$

5) $5\frac{1}{2}x^2-18x+65=(3x-3)^2$

$x=\pm 4.$

6) $\sqrt{x^2+m}=\frac{n-x^2}{\sqrt{x^2+m}}$

$x=\pm\sqrt{\frac{n-m}{2}}.$

7) $\frac{ax^2-7a^3}{\sqrt{a^2-x^2}}-a\sqrt{a^2-x^2}=0$

$x=\pm 2a.$

8) $x+\sqrt{a+x^2}=\frac{4a}{\sqrt{a+x^2}}$

$x=\pm 3\sqrt{\frac{1}{7}a}.$

9) $\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{6+\sqrt{x^2+36}}}}=2$

$x=\pm 8.$

10) $\sqrt{7+\sqrt{2x+\sqrt{3x^2-16x+17}}}=3$

$x=\pm 1.$

11) $\sqrt{a^2+\sqrt{6a^4+\sqrt{x^2+5a^8}}}=2a$

$x=\pm 2a^4.$

12) $x^2=\sqrt{m^2+\sqrt{x^8+\frac{1}{4}m^2x^4}}$

$x=\pm \frac{1}{3}\sqrt{6m}.$

13) $b=\sqrt{2m\left(m-\sqrt{m^2-\frac{1}{4}x^2}\right)}$

$x=\pm\sqrt{\left(2b+\frac{b^2}{m}\right)\left(2b-\frac{b^2}{m}\right)}.$

14) $x+\sqrt{11+x^2}=66:\sqrt{11+x^2}$

$x=\pm 5.$

15) $\sqrt{\frac{147}{x^2}+33}-\sqrt{\frac{147}{x^2}-2}=5$

$x=\pm 7.$

16) $\sqrt[3]{(63-5x^2)^2}=x\sqrt[3]{4x}$

$x=\pm 3.$

17) $\begin{cases} x^2+y^2=113=a \\ x^2-y^2=15=b \end{cases}$

$x=\pm 8$ und $y=\pm 7$; und allgemein

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}} \text{ und } y=\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

18) $\begin{cases} xy=120 \\ x:y=1\frac{1}{5} \end{cases}$

$x=\pm 12$ und $y=\pm 10$.

19) $\begin{cases} \frac{x+y}{x}=2\frac{1}{3} \\ xy=300 \end{cases}$

$x=\pm 15$ und $y=\pm 20$.

20) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}=7=a \\ xy=192=b \end{cases}$

$x=\pm 16$ und $y=\pm 12$; und allgemein

$$x=\pm\sqrt{\frac{b(a+1)}{a-1}} \text{ und } y=\pm\sqrt{\frac{b(a-1)}{a+1}}.$$

21) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=3=a \\ xy=1024=b \end{cases}$

$x=\pm 64$ und $y=\pm 16$; und allgemein

$$x=\pm\frac{a+1}{a-1}\sqrt{b} \text{ und } y=\pm\frac{a-1}{a+1}\sqrt{b}.$$

22) $\begin{cases} xy=96=a \\ xz=144=b \\ yz=216=c \end{cases}$

$x=\pm 8$; $y=\pm 12$ und $z=\pm 18$; und allgemein

$x=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$; $y=\pm\sqrt{\frac{ac}{b}}$ und $z=\pm\sqrt{\frac{bc}{a}}$.

B. Nicht reinquadratische Gleichungen.

a. Fragen.

1. Wann heißt eine Gleichung nicht rein= oder unrein=quadratisch? — Wann ist eine solche Gleichung geordnet?

2. Was versteht man unter den Wurzeln einer unrein=quadratischen Gleichung? — Wie viele Wurzeln muß eine jede solche Gleichung haben, und wie können dieselben beschaffen sein?

3. Woran erkennt man bei einer geordneten unreinquadratischen Gleichung, a) wie viel die Summe, b) wie viel das Produkt der beiden Wurzeln beträgt, c) ob die beiden Wurzeln gleiche, oder entgegengesetzte Qualitäten haben, d) welche von den Wurzeln die positive und welche die negative ist, e) ob die eine Wurzel oder ob beide Wurzeln ganze, oder gebrochene Zahlen sind, und f) ob die Wurzeln reel oder imaginär sind? — Wie müssen im letzten Falle die imaginären Wurzeln beschaffen sein?

4. Wie leitet man aus einer quadratischen Gleichung eine andere ab, worin jede Wurzel um irgend eine Zahl, z. B. um m, größer, oder kleiner ist?

5. Um wie viel muß jede Wurzel auf diese Weise geändert werden, damit das zweite Glied der geordneten deducirten Gleichung Null wird?

6. Wie leitet man aus einer quadratischen Gleichung eine andere ab, in welcher jede Wurzel um irgend ein Vielfaches, z. B. um das mfache, größer, oder kleiner ist?

7. Wie kann auf diese Weise aus einer geordneten quadratischen Gleichung, in welcher der Coefficient des zweiten Gliedes a) größer und b) kleiner als 1 ist, eine andere solche Gleichung abgeleitet werden, in welcher dieser Coefficient genau 1 beträgt?

8. Wie verwandelt man jede reinquadratische Gleichung formel in eine unreinquadratische?

9. Durch welche Methoden kann man die unreinquadratischen Gleichungen auf reinquadratische bringen? — Wie ist bei einer jeden derselben der Gang des Verfahrens? — Worin besteht sonach die Auflösung einer unreinquadratischen Gleichung?

10. Wann soll die Auflösung indirekte gemacht werden?

11. Welche von den höhern Gleichungen können auf dieselbe Weise, wie die unreinquadratischen aufgelöst werden? — Wie viele Wurzeln hat dann eine solche Gleichung?

12. Was versteht man unter Wurzelgleichungen? — Wie findet man bei quadratischen Gleichungen die eine Wurzelgleichung, wenn man die andere kennt?

13. Wie findet man auf ähnliche Weise bei kubischen Gleichungen a) die dritte Wurzelgleichung, wenn man die beiden andern kennt, und b) wie gelangt man umgekehrt zu den beiden andern, wenn nur die dritte oder überhaupt die eine Wurzelgleichung bekannt ist?

14. Wie findet man ebenso die beiden andern Wurzelgleichungen einer Gleichung vom vierten Grade, wenn man bereits zwei von den Wurzelgleichungen kennt?

15. Wie heißen hiernach von folgenden Gleichungen:

1) $x^3=64$,

2) $x^3=-a^6$,

3) $x^{-3}=1$,

4) $x^3=a^m$,

5) $x^4=16$,

6) $x^4-4x^2=41$,

7) $x^6=64$

die sämmtlichen Wurzelgleichungen und Wurzeln?

16. Man leite aus folgenden Gleichungen:

1) $x^2-3x=10$,

2) $3x^2+12x=63$,

3) $x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$,

4) $x^2+2\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=0$,

5) $4x^2-5x+1{,}5=0$,

6) $x^2+ax=b$,

7) $x^2-ax+b=0$,

8) $x^2-x\sqrt{3}=4$,

9) $x^2-x\sqrt{a+b}=a+b$,

10) $x^2\sqrt{m}-mx=m$

andere geordnete Gleichungen ab, in welchen jede Wurzel a) um 2 größer, b) um 3 kleiner, c) 4mal größer, d) 5mal kleiner ist, als in den gegebenen Gleichungen; in welchen ferner e) der Coefficient des zweiten Gliedes $=0$, f) derselbe Coefficient $=1$ ist, und in welchen endlich g) die Wurzeln

bei unveränderten Quantitäten entgegengesetzte Qualitäten haben. — Wie heißen nun die deducirten Gleichungen?

b. Aufgaben.

1) $x^2-8x+16=0$

$x=4$ und $x=4$.

2) $\frac{a^2x^2}{b^2}-\frac{2ax}{c}+\frac{b^2}{c^2}=0$

$x=\frac{b^2}{ac}$ und $x=\frac{b^2}{ac}$.

3) $x^2-7x+12=0$

$x=3$ und $x=4$.

4) $x^2=x+2$

$x=2$ und $x=-1$.

5) $x^2-13x+40=0$

$x=8$ und $x=5$.

6) $x^2-7\frac{1}{2}x=4$

$x=8$ und $x=-\frac{1}{2}$.

7) $x^2=3\frac{3}{4}+x$

$x=2\frac{1}{2}$ und $x=-1\frac{1}{2}$.

8) $x^2=6x-10$

$x=3\pm\sqrt{-1}$.

9) $15x^2+11x+2=0$

$x=-\frac{1}{3}$ und $x=-\frac{2}{5}$.

10) $6x^2+108x+432=0$

$x=-6$ und $x=-12$.

11) $\frac{1}{2}x^2=2\frac{1}{2}x+42$

$x=12$ und $x=-7$.

12) $-2x(1-6x)=\frac{1}{4}$

$x=\frac{1}{4}$ und $x=-\frac{1}{12}$.

13) $x^2+5ax+6a^2=0$

$x=-2a$ und $x=-3a$.

14) $x^2\mp3(a^2+b)x+9a^2b=0$

$x=\pm3a^2$ und $x=\pm3b$.

15) $x(x-m)=ab$

$x=\frac{1}{2}m\pm\frac{1}{2}\sqrt{m^2+4ab}$.

16) $32a^{2m}c^{n-1}+4a^{m+3}c^{n-1}\times(ac^3-2).x=a^7c^{n+2}x^2$

$x=-\frac{8a^m}{a^4c^3}$ und $x=\frac{4a^m}{a^3}$.

17) $ab^3x^2+(1+c)bd\sqrt{c}+cb^2x^2=(b^3d\sqrt{c}+(ab+c)(1+c))x$

$x=\frac{1+c}{b^2}$ und $x=\frac{bd\sqrt{c}}{ab+c}$.

18) $x^2+2x\sqrt{3}=9$

$x=-\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}$.

19) $bx^2+abx=-2ab$

$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-8a}}{2}$.

20) $a(dx-cx^2)=b(cx-d)$

$x=\frac{d}{c}$ und $x=-\frac{b}{a}$.

21) $\frac{x^3-64}{x-4}=0$

$x=-2\pm2\sqrt{-3}$.

22) $\frac{2-3x}{4}-\frac{4-x}{x-2}=2\frac{3}{4}$

$x=1$ und $x=-\frac{2}{3}$.

23) $\frac{300}{x}+1=\frac{300}{x-10}$

$x=60$ und $x=-50$.

24) $\frac{4x}{2+x}-3=\frac{10}{3x}$

$x=10$ und $x=-\frac{2}{3}$.

25) $\frac{3}{10-x}-1=\frac{4}{x-7}$

$x=9$ und $x=1$.

26) $\frac{0,6x-9,6}{x}-\frac{2x+4}{5x-115}=\frac{2x-384}{15x}$

$x=48$ und $x=-115$.

27) $\frac{x+5}{20}-\frac{2x+5}{75}=2\frac{1}{3}-\frac{7x-45}{3x+45}$

$x=35$ und $x=-57\frac{6}{7}$.

28) $\frac{x}{x-6}+1=\frac{60}{x+4}$

$x=21$ und $x=8$.

29) $\frac{2x+8}{x-8}=\frac{x+8}{3x-8}-7$

$x=4$ und $x=4\frac{4}{13}$.

30) $\frac{x+4}{x-8}-\frac{x+8}{6x-15}=6\frac{3}{5}$

$x=10$ und $x=\frac{394}{173}$.

31) $\frac{84}{x}-\frac{180}{x+2}+\frac{60}{x-8}=0$

$x=28$ und $x=1\frac{1}{3}$.

32) $\frac{x+a}{x+b}-\frac{b-x}{x-a}=1$

$x=-\frac{a-b\mp\sqrt{4ab+5(a-b)^2}}{2}.$

33) $4x-12\sqrt{x}+9=25$

$x=16$ und $x=(-1)^2$.

34) $49-14\sqrt{x}=4-x$

$x=81$ und $x=25$.

35) $3\sqrt{7+2x^2}=5\sqrt{4x-3}$

$x=3$ und $x=2\frac{5}{9}$.

36) $\sqrt{6x-11}=\sqrt{249-2x^2}$

$x=10$ und $x=-13$.

37) $\frac{1}{6}\sqrt{3x-6}=\sqrt{\frac{81}{11+5x}}$

$x=14$ und $x=-14{,}2$.

38) $\sqrt{6-x}=4-\sqrt{2x-1}$

$x=5$ und $x=3\frac{2}{9}$.

39) $x-2\sqrt{(-2)^2-3x}+1=0$

$x=1$ und $x=-15$.

40) $\sqrt{ax}=a-\sqrt{3ax-a^2}$

$x=\frac{3a\pm a\sqrt{5}}{2}.$

41) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$

$x=9$ und $x=-3\frac{3}{5}$.

42) $\sqrt{\frac{3}{2}x-5}-\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1}{5}x+45}=\frac{1}{4}\sqrt{10x+56}$

$x=20$ und $x=\frac{14568980}{2874649}$.

43) $2\sqrt{204-5x}=20-\sqrt{3x-68}$

$x=28$ und $x=\frac{12252}{529}$.

44) $7\sqrt{\frac{3}{2}x-5}-\sqrt{\frac{1}{5}(1+x)}=\sqrt{10x-4}$

$x=4$ und $x=\frac{1454516}{399889}$.

45) $\begin{cases} x+y=81 \\ xy=1598 \end{cases}$

$x=34$ oder 47 und $y=47$ oder 34.

46) $\begin{cases} x^2+y^2=68=a \\ xy=16=b \end{cases}$

$x=\pm 8$ und $y=\pm 2$; und allgemein

$x=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2}$ und $y=\frac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2}$.

47) $\begin{cases} x^2+xy=210 \\ y^2+xy=231 \end{cases}$

$x=\pm 10$ und $y=\pm 11$.

48) $\begin{cases} x^2-20xy=300y^2 \\ 15y^2+x=30 \end{cases}$

$x=30.(-1\pm\sqrt{3})$ und $y=-1\pm\sqrt{3}$; ferner auch

$x=-\frac{10}{3}(1\pm\sqrt{19})$ und $y=\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{19})$.

49) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=8 \\ 3y-2x=4 \end{cases}$

$x=10$ oder -2 und $y=8$ oder 0.

50) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=36=a \\ x^2-y^2+x-y=24=b \end{cases}$

$x=5$ oder -6 und $y=2$ oder -3; und allgemein

$x=\frac{-1\pm\sqrt{2a+2b+1}}{2}$ und $y=\frac{-1\pm\sqrt{2a-2b+1}}{2}$.

51) $\begin{cases} x-y=a \\ x^3-y^3=b \end{cases}$

$x=\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}$ und $y=-\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}$.

52) $x+y=x^2-y^2=xy$

$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ und $y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

53) $\begin{cases} x-2\sqrt{x}=y-1 \\ y-4\sqrt{y}=x-19 \end{cases}$

$x=(-8)^2$ oder 16 und $y=81$ oder 9.

54) $\begin{cases} xy-y=4 \\ \sqrt{2x}-\sqrt{y}=0 \end{cases}$

$x=2$ oder -1 und $y=4$ oder -2.

55) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{7}=\sqrt{x}-\sqrt{y} \\ x^2+2y^2=337+9y \end{cases}$

$x=16$ oder $-12\frac{376}{418}$ und $y=9$ oder $-7\frac{107}{418}$.

56) $\begin{cases} 8x-3\sqrt{y}=2 \\ 3\sqrt{5x+y}=9 \end{cases}$

$x=1$ oder $-1\frac{13}{64}$ und $y=4$ oder $15\frac{1}{64}$.

57) $\begin{cases} 2\sqrt{x-6y}=y+3 \\ \sqrt{x-1}=y+2 \end{cases}$

$x=10$ oder $33\frac{1}{9}$ und $y=1$ oder $3\frac{2}{3}$.

58) $\begin{cases} x^2+\frac{1}{2}z=8=a \\ x^2+y^2=20=b \\ y^2+z^2=80=c \end{cases}$

$x=2$; $y=4$ und $z=8$ oder $x=3\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}\sqrt{31}$ und

$z=-8\frac{1}{2}$; allgemein ist

$$x=\pm\sqrt{a+\frac{1}{8}\mp\frac{1}{2}\sqrt{a+c-b+\frac{1}{16}}}$$

$$y=\pm\sqrt{b-a-\frac{1}{8}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a+c-b+\frac{1}{16}}}$$

und $z=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{a+c-b+\frac{1}{16}}$.

59) $\begin{cases} y^2+\sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}+\sqrt{z}=5 \\ y+\sqrt{z}=4 \end{cases}$

$x=4$ oder $(-1)^2$; $y=1$ oder -2 und $z=9$ oder 36.

60) $\begin{cases} xy-x=21 \\ xz-z=10 \\ yz-y=32 \end{cases}$

$x=3$ oder $-2\frac{1}{3}$; $y=8$ oder -8 und $z=5$ oder -3.

C. Gleichungen, welche wie quadratische behandelt werden.

1) $x^{2m}+ax^m=b$

$$x=\sqrt[m]{\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}}.$$

2) $x^4+8x^2+9=0$

$$x=\pm\left(\sqrt{-\frac{1}{2}}\pm\sqrt{-\frac{7}{2}}\right).$$

3) $x^4-6x^2+1=0$

$x=\pm(\sqrt{2}\pm1)$.

4) $x^4+4x^2+16=0$

$x=\pm(1\pm\sqrt{-3})$.

5) $x^4-5x^2=36$

$$x=\pm\sqrt{\frac{5\pm13}{2}}.$$

6) $x^4-4x^2\sqrt{3}+3=0$

$$x=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{6\sqrt{3}}\pm\sqrt{2\sqrt{3}}).$$

7) $x^2+3=\frac{17-x^2}{x^2+3}$

$x=\pm1$ oder $\pm2\sqrt{-2}$.

8) $x^4-2abx^2-m^2x^2+a^2b^2=0$

$x=\pm\left(\frac{1}{2}m\pm\frac{1}{2}\sqrt{m^2+4ab}\right)$.

9) $x^2+216+\sqrt{x^2+216}=3080$

$x=\pm53$ oder $\pm\sqrt{(-56)^2-216}$.

10) $\sqrt{2x^2+17}-\sqrt{x^2-7}=4$

$x=\pm\sqrt{24\pm8}$.

11) $\sqrt{x^2+a}+x^2+\frac{1}{4}=b^2-a$

$x=\pm\sqrt{-a+\left(\pm b-\frac{1}{2}\right)^2}$.

12) $b=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+\sqrt{b^4+\frac{4}{x^2}}+b\sqrt{2b^2+2\sqrt{b^4+\frac{4}{x^2}}}}$

$x=\pm\frac{2}{3b^2}\sqrt{-5\pm\sqrt{28}}$.

13) $b=\frac{na}{2}\sqrt{2a^2+x^2+2a\sqrt{a^2+2x^2}}$

$x=\pm\sqrt{\frac{4b^2}{a^2n^3}+2a^2\pm\frac{2}{n}\sqrt{a^4n^2+8b^2}}$.

14) $x^{-6}+4x^{-3}=-3$

$x=-1;\ x=\sqrt[3]{-\frac{1}{3}};\ \ldots$

15) $2x^{-3}-120=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}$

$x=\frac{1}{4};\ x=\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{15}\right)^2};\ \ldots$

16) $x^3-\frac{1}{2}x\sqrt{x}=715\frac{1}{2}$

$x=\sqrt[3]{\left(\frac{1\pm107}{4}\right)^2};\ \ldots$

17) $\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}=12$

$x=\pm\sqrt{\left(\frac{1\pm7}{2}\right)^3}.$

18) $\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}=3$

$x=8;\ x=-\frac{27}{8}.$

19) $1-220\sqrt[-2]{x^5}=5589x^{-5}$

$x=9;\ x=\sqrt[5]{529}.$

20) $3x^5-7x^2\sqrt{x}=2848$

$x=4;\ x=\sqrt[5]{\left(-\frac{89}{3}\right)^2}.$

21) $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2} = 7 \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1 \end{cases}$

$x=64$ und $y=27$.

22) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 706 \\ x^2 + y^4 = 106 \end{cases}$

$x = \pm 5$ oder $\pm\sqrt{-24}$ und $y = \pm 3$ oder $\pm\sqrt[4]{130}$.

23) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} + x^2 - y = 56 \\ x^4 + y = 4111 \end{cases}$

$x = \pm 8$; $x = \pm\sqrt{-65}$; ... und $y = 15$; $y = -114$; ...

24) $\begin{cases} (x-y)^2 + \frac{1}{2}x - 8 = \frac{1}{2}y + 60 \\ xy = 240 \end{cases}$

$x = 20$; ... und $y = 12$; ...

25) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7y \\ x^2 - xy = 2 \end{cases}$

$x = \pm 2$ oder $\pm\sqrt{-2}$ und $y = \pm 1$ oder $\pm 2\sqrt{-2}$.

V. Abschnitt.

Ueber Verhältnisse, Proportionen, Progressionen und Logarithmen.

§. 19. Ueber Verhältnisse.

A. Arithmetische Verhältnisse.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter einem Verhältnisse, und wann heißt dasselbe arithmetisch?

2. Besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen einem arithmetischen Verhältnisse und einer Differenz?

3. Welche von den beiden Zahlen eines Verhältnisses heißt das Vorderglied und welche das Hinterglied? — Ist jenes oder ist dieses Glied der Minuend? — Herrscht vielleicht hierin Willkür?

4. Gilt in den unten folgenden Aufgaben das Vorderglied als Minuend oder als Subtrahend?

5. Durch welche Summe erhält man das Hinterglied (b) eines arithmetischen Verhältnisses, wenn dasselbe als Minuend

betrachtet wird? — Wie wird hiebei das Vorderglied (a), und wie die Differenz (d) selbst ausgedrückt?

6. Durch welche Summe wird das Vorderglied eines arithmetischen Verhältnisses dann erhalten, wenn dasselbe als Minuend genommen wird? — Wie wird in diesem Falle das Hinterglied, und wie die Differenz ausgedrückt?

7. Wann ist die Differenz negativ?

8. Wie heißen in den folgenden Aufgaben die gesuchten Werthe dann, wenn jedesmal das Vorderglied als Minuend genommen wird?

9. Wie heißen die diesen Aufgaben entsprechenden Verhältnisse; und welche von den Gliedern müssen eingeklammert werden?

10. Wann heißt ein arithmetisches Verhältniß rational, wann irrational und wann imaginär?

11. Wann sind zwei arithmetische Verhältnisse einander gleich?

12. Wie entsteht ein zusammengesetztes arithmetisches Verhältniß?

13. Bleibt ein arithmetisches Verhältniß ungeändert, wenn jedes Glied um gleichviel vermehrt, oder vermindert wird? — Ist dasselbe auch dann der Fall, wenn beide Glieder durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt werden?

14. Wie werden arithmetische Verhältnisse reducirt? — Wie heißt die Differenz, wenn durch das Reduciren a) das Vorderglied, und b) das Hinterglied Null geworden ist?

15. Welche frühern Regeln können auch hier wieder Anwendung finden?

№	Gegebene Größen. Vorderglied.	Hinterglied.	Differenz.	Gesuchte Werthe.
1.	$6a$	$10a$		$d=4a.$
2.	$12a^2$	$3a^2$		$d=-9a^2.$
3.	$-3m$	$7m$		$d=10m.$
4.	$a+x$	$4a-6x$		$d=3a-7x.$
5.	$5\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a+b$		$d=b-5a.$
6.	$-0{,}4$	$1{,}6$		$d=2.$
7.	$3a^2-2b$	a^2+b		$d=3b-2a^2.$
8.	$-2{,}5$	$-4\frac{1}{3}$		$d=-1\frac{5}{6}.$
9.	$3a^m+2$		$1-a^m$	$b=2a^m+3.$
10.	$5\sqrt{a}$		$-15\sqrt{a}$	$b=-10\sqrt{a}.$
11.	$1\frac{1}{2}$		$a-2$	$b=a-\frac{1}{2}.$
12.	$\frac{x}{a}$		$\frac{a^2-x^2}{ax}$	$b=\frac{a}{x}.$
13.	$3\sqrt{2}$		$-\sqrt{8}$	$b=\sqrt{2}.$
14.	$\frac{a^2}{a-p}$		$\frac{p(p-2a)}{a-p}$	$b=a-p.$

№	Gegebene Größen.			Gesuchte Werthe.
	Vorderglied.	Hinterglied.	Differenz.	
15.	$2\frac{1}{2}\sqrt{18a}$		$\sqrt{\frac{1}{2}a}$	$b=8\sqrt{2a}$.
16.	$(1+m)^2$		$-(1-m)^2$	$b=4m$.
17.		$3x^3$	$-2x^3$	$a=5x^3$.
18.		$m+4\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$a=m+2\frac{7}{8}$.
19.		$(x-y)^2$	$(x+y)^2$	$a=-4xy$.
20.		$4+x^2$	$4x$	$a=(2-x)^2$.
21.		$2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$	$-4\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$	$a=8\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.
22.		$4-x$	$x-4$	$a=8-2x$.
23.		$(x+1)^3$	$(x-1)^3$	$a=6x^2+2$.
24.		$-10\sqrt{2\frac{1}{2}}$	$-20\sqrt{0{,}4}$	$a=-\sqrt{10}$.

B. Geometrische Verhältnisse.

a. Fragen.

1. Wann ist ein Verhältniß geometrisch? — Auf welche Weise werden die beiden Zahlen, welche das Verhältniß bilden, unter sich verbunden?

2. Ist das geometrische Verhältniß von einem Quotienten wesentlich verschieden?

3. Ist es gleichgiltig, welches von den beiden Gliedern als Dividend genommen wird?

4. Welches von den beiden Gliedern des Verhältnisses ist in den unten folgenden Aufgaben als Dividend genommen?

5. Durch welches Produkt stellt sich das Hinterglied (b) eines geometrischen Verhältnisses dar, wenn dasselbe als Dividend gilt? — Wie wird sodann das Vorderglied (a) und der Quotient (q) ausgedrückt?

6. Durch welches Produkt stellt sich dagegen das Vorderglied dann dar, wenn es als Dividend gilt? — Wie wird hiebei das Hinterglied und der Quotient des Verhältnisses ausgedrückt?

7. Wie heißen in den unten folgenden Aufgaben die gesuchten Werthe dann, wenn das Vorderglied zum Dividend genommen wird?

8. Wann ist ein geometrisches Verhältniß rational, wann irrational und wann imaginär?

9. Wann muß der Quotient kleiner als die Einheit (1) sein?

10. Wann sind zwei geometrische Verhältnisse einander gleich?

11. Wie entsteht ein zusammen gesetztes geometrisches Verhältniß?

12. Bleibt ein geometrisches Verhältniß ungeändert, wenn ein jedes Glied desselben a) um gleichviel vermehrt, oder vermindert, b) durch dieselbe Zahl multiplicirt, dividirt, potenzirt oder radicirt wird?

13. Wie wird ein geometrisches Verhältniß reducirt? — Wie heißt der Quotient, wenn durch das Reduciren a) das Vorderglied und b) das Hinterglied der Einheit (1) gleich geworden ist?

14. Wie wird jeder gemeine ächte, unächte oder gemischte, und wie jeder Decimalbruch in der Form des entsprechenden geometrischen Verhältnisses angeschrieben?

15. Welche frühern Regeln können hier in Anwendung kommen?

b. Aufgaben.

№	Gegebene Größen.			Gesuchte Werthe.
	Vorderglied.	Hinterglied.	Quotient.	
1.	$\frac{1}{2}+\sqrt{x}$	$\frac{1}{4}-x$		$q=\frac{1}{2}-\sqrt{x}$.
2.	$-2{,}4a^3$	$6a^4$		$q=-2{,}5a$.
3.	x^2-y^2	$x+y$		$q=\frac{1}{x-y}$.
4.	$\frac{1}{3}a^2b$	$\frac{1}{2}ab^2$		$q=\frac{3b}{2a}$.
5.	$0{,}3\sqrt{2x}$	$0{,}03\sqrt{6x}$		$q=0{,}1\sqrt{3}$.
6.	$\frac{m}{x}$	$-\frac{x}{m}$		$q=-\frac{x^2}{m^2}$.
7.	$-3a^{m-2}b^5$	$-\frac{1}{4}a^4b$		$q=\frac{1}{12}a^{6-m}b^{-4}$.
8.	$2\sqrt{3x}$	$\sqrt[3]{x}$		$q=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}$.
9.		$1\frac{1}{3}m^{2x}$	$2m^{1-x}$	$a=\frac{2}{3}m^{3x-1}$.
10.		$\frac{1}{2x}$	$-\frac{1}{2x}$	$a=-1$.
11.		$m\sqrt{9-x^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{36-4x^2}$	$a=m$.

№	Gegebene Größen.			Gesuchte Werthe.
	Vorderglied.	Hinterglied.	Quotient.	
12.		$0{,}4\sqrt{3x}$	$10\sqrt{2x}$	$a=0{,}02\sqrt{6}$.
13.		$m+x$	$m^{-1}+x^{-1}$	$a=mx$.
14.		x	$\sqrt[3]{-x}$	$a=-\sqrt[3]{x^2}$.
15.		7	$3-\sqrt{2}$	$a=3+\sqrt{2}$.
16.		$\sqrt{68}$	$2\sqrt{3-\frac{1}{2}\sqrt{2}}$	$a=\sqrt{6+\sqrt{2}}$.
17.	$\frac{2}{x}$		$\sqrt{\frac{x}{2}}$	$b=\sqrt{\frac{2}{x}}$.
18.	$3a^{2m-1}b^4$		$\frac{1}{9}a^{2-m}b^{-4}$	$b=\frac{1}{3}a^{m+1}$.
19.	$4\sqrt{m}$		$0{,}1\sqrt[4]{m}$	$b=0{,}4\sqrt[4]{m^3}$.
20.	$a\sqrt{m-x}$		$2a\sqrt[-2]{m-x}$	$b=2a^2$.
21.	$a-2\sqrt{x}$		$a+2\sqrt{x}$	$b=a^2-4x$.
22.	$2\sqrt[3]{-x}$		$4\sqrt[3]{x^2}$	$b=-8x$.
23.	$\frac{4}{5}\sqrt{a+x}$		$2\frac{1}{2}\sqrt{a-x}$	$b=2\sqrt{a^2-x^2}$.
24.	$10\sqrt[4]{1\frac{1}{2}}$		$0{,}2\sqrt{12\sqrt[3]{3}}$	$b=2\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}$.

§. 20. Ueber Proportionen.

A. Arithmetische Proportionen.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter einer Proportion überhaupt, und insbesondere unter einer arithmetischen?

2. Ist die Proportion von einer gewöhnlichen Gleichung wesentlich verschieden?

3. Was stellen bei einer arithmetischen Proportion deren beide Seiten vor?

4. Welche von den vier Gliedern einer Proportion nennt man die innern, welche die äußern, und welche die homologen Glieder?

5. Wann ist die Proportion diskret, wann stetig? — Wie wird eine jede von diesen geschrieben und gelesen? — Welche Abkürzung im Schreiben und Ablesen ist bei der letztern üblich?

6. Wann muß ein Glied eingeklammert werden?

7. Wie wird allgemein jede diskrete arithmetische Proportion vorgestellt, wenn darin a und b die beiden Vorderglieder sind, und d die gemeinschaftliche Differenz bedeutet?

8. Wie heißt für diesen Fall allgemein jede stetige arithmetische Proportion?

9. Welche Glieder können bei einer jeden arithmetischen Proportion gegenseitig verwechselt werden? — Was hat man besonders zu beobachten, wenn man hier das Mittelglied einer stetigen Proportion mit einem von den äußern vertauscht?

10. Wie werden arithmetische Proportionen vereinfacht oder reducirt?

11. Wie muß die arithmetische Proportion $a \div b = c \div d$ dann heißen, wenn sie so geschrieben wird, daß 1) b, 2) c und 3) d zum ersten Gliede der Proportion genommen wird; wie dann, wenn 4) a um die Zahl m vergrößert, 5) b um die Zahl n verkleinert, 6) a um m und zugleich b um n vergrößert, 7) c um m und zugleich d um n verkleinert werden; ferner dann, wenn 8) a zu b addirt, 9) d von c subtrahirt, 10) c von a subtrahirt, 11) b zu d addirt, 12) a durch m multiplicirt, 13) b durch n dividirt und 14) a durch b multiplicirt und zugleich d durch c dividirt wird; ferner wenn 15) die Qualität des ersten Gliedes, 16) die Qualitäten des ersten und zugleich des dritten Gliedes und endlich 17) die Qualitäten eines jeden Gliedes der Proportion verändert werden, und in jedem Falle die Proportionengleichung richtig bleiben soll?

12. Wie muß folgende stetige arithmetische Proportion $a \div b \div c$ heißen, wenn dieselbe so geschrieben wird, daß 1) das dritte Glied und 2) das Mittelglied an die Stelle des ersten zu stehen kommt; wie dann, wenn 3) das erste Glied um m vergrößert, 4) das Mittelglied um n verkleinert, 5) das erste Glied um m und zugleich das Mittelglied um n verkleinert, 6) das erste Glied um m vergrößert und das dritte zugleich um n verkleinert werden; ferner dann, wenn 7) das erste Glied um das Mittelglied und 8) dieses um jenes vermehrt, 9) das Mittelglied um das dritte und 10) dieses um jenes vermindert wird, wenn 11) das erste Glied durch m, 12) das dritte Glied durch das Mittelglied multiplicirt, 13) das Mittelglied durch das erste, 14) das erste Glied durch das Mittelglied dividirt wird; endlich 15) das Mittelglied und 16) die beiden äußern Glieder negativ oder entgegengesetzt genommen werden?

13. Wie heißt die gemeinschaftliche Differenz bei einer jeden von den so eben verwandelten Proportionen; oder wodurch überzeugt man sich von der Richtigkeit der Verwandlung selbst?

14. Wie verwandelt man jede arithmetische sowohl diskrete als stetige Proportion in eine gemeine Gleichung; worin besteht sonach die Auflösung dieser Proportionen?

15. Kann man umgekehrt jede gemeine Gleichung sowohl in eine diskrete als auch in eine stetige arithmetische Proportion verwandeln? — Auf welche Weise hat diese Verwandlung zu geschehen?

16. Ist es gleichgiltig, welches Glied von der gegebenen Gleichung zum ersten Gliede der Proportion genommen wird?

17. Kann selbst die Nulle als erstes Glied der Proportion gewählt werden? — Jedesmal?

18. Welche diskreten arithmetischen Proportionen erhält man, wenn die gemeine Gleichung $1+a^2=2x+6\sqrt{b}$ in die entsprechende Proportion dadurch verwandelt wird, daß 1) 0, 2) 1, 3) 2, 4) 6, 5) a^2, 6) $\sqrt{a}$, 7) 2x, 8) x, 9) $6\sqrt{b}$, 10) $\sqrt{b}$, 11) a^2+1, 12) $\frac{a^2+1}{2}$, 13) $x+3\sqrt{b}$, 14) $2x+6\sqrt{b}$, 15) $2x+a^2$ und 16) $2x+1$ zum ersten Gliede der Proportion gemacht wird?

19. Welche stetigen arithmetischen Proportionen erhält man aus derselben Gleichung und unter denselben Bedingungen, wie in Nro. 18 von 1) bis 16)?

b. Aufgaben.

1) $3\sqrt{x-2} \div \frac{1}{2} = 0,7 \div \sqrt{x-2}$

$x=2,09.$

2) $7a^4 \div 6ab^m = 4a^4 \div (2b^m - a^3)x$

$x=3a.$

3) $2bm^2 \div 1\frac{1}{3}bm = \left(m - \frac{1}{3}\right)x \div \frac{2}{3}bm$
$x = 2bm.$

4) $\sqrt{x-8} \div \sqrt{x+4} = 1\frac{1}{5} \div 3{,}2$
$x = 12.$

5) $2\sqrt{5-x} \div 4 = \sqrt{13-4x} \div 3$
$x = 1.$

6) $\sqrt{x+3} \div \sqrt{2} = 2 \div \sqrt{3-x}$
$x = \pm 1.$

7) $2(ab+2) \div 2bx = 4 \div (x^2 - ax)$
$x = a$ und $x = 2b.$

8) $(x+a) \div (x-a) = 10a \div 6ax$
$x = 1\frac{1}{3}.$

9) $(x-4)^2 \div x^2 = 3(a-2) \div 3a$
$x = 2\frac{3}{4}.$

10) $\sqrt{x} \div 2 = 3 \div \sqrt{2x+1}$
$x = 4$ und $x = 144.$

11) $\sqrt[4]{x} \div 6 \div \sqrt{x}$
$x = 81$ und $x = 256.$

12) $a \div x^m \div b$
$x = \sqrt[m]{\frac{a+b}{2}}.$

13) $4ax \div \frac{a}{2}\sqrt{a^2+12ax} \div a^2$

$x=\frac{1}{4}a.$

14) $\begin{cases} 1\frac{2}{3} \div 4\frac{1}{5}y=(2-3x) \div \left(1-\frac{11}{3}\right) \\ 2\frac{1}{2}y \div (0{,}4+2x)=0{,}4y \div 5{,}9 \end{cases}$

$x=8$ und $y=5$.

B. Geometrische Proportionen.

a. Fragen.

1. Wann ist eine Proportion geometrisch, und was stellen hiebei die beiden Seiten vor?

2. Wie wird eine diskrete und wie eine stetige geometrische Proportion geschrieben und gelesen? — Wann muß ein Glied eingeklammert werden?

3. Wie wird allgemein eine jede diskrete geometrische Proportion vorgestellt, wenn darin a und b die beiden Vorderglieder sind, und q den gemeinsamen Quotienten bedeutet?

4. Wie heißt für diesen Fall allgemein jede stetige geometrische Proportion?

5. Welche Glieder können bei einer jeden geometrischen Proportion gegen einander vertauscht werden? — Was hat man auch hier zu beobachten, wenn das Mittelglied einer stetigen Proportion mit einem von den äußern vertauscht wird?

6. Wie werden geometrische Proportionen vereinfacht oder reducirt?

7. Wie muß die Proportion $a :: b = c :: d$ dann heißen, wenn 1) a, 2) c und 3) d zum zweiten Gliede der Pro-

portion genommen wird; wie dann, wenn 4) a durch m, 5) b durch n multiplicirt, 6) a durch m und zugleich b durch n dividirt werden; ferner wenn 7) das zweite Glied durch das erste multiplicirt, 8) das vierte Glied durch das zweite dividirt, 9) die beiden äußern Glieder durch mn multiplicirt werden, wenn 10) im ersten Gliede die Qualität verändert wird, wenn 11) a um b vergrößert, 12) c um d vermindert, 13) b um d vergrößert und 14) a um c vermindert wird; wie dann, wenn 15) a durch 2 potenzirt, 16) b durch 3 radicirt und 17) c durch 4 potenzirt und zugleich d durch 5 radicirt wird, und in jedem Falle die Proportionengleichung richtig bleiben soll?

8. Wie heißt der gemeinschaftliche Quotient von einer jeden der so eben verwandelten Proportionen; oder wodurch überzeugt man sich von der Richtigkeit der Verwandlung selbst?

9. Wie verwandelt man eine jede geometrische diskrete und stetige Proportion in eine gemeine Gleichung; worin besteht sonach die Auflösung dieser Proportionen?

10. Kann umgekehrt eine jede gemeine Gleichung sowohl in eine diskrete als in eine stetige geometrische Proportion verwandelt werden? — Wie hat man hiebei zu verfahren?

11. Wie viele Faktoren müssen auf jeder Seite der Gleichung vor ihrer Verwandlung in eine Proportion sein oder gebildet werden? — Ist es alsdann gleichgiltig, welcher von den sämmtlichen Faktoren zum ersten Gliede der Proportion gemacht wird?

12. Kann selbst die Nulle jedesmal das erste Glied der Proportion abgeben?

13. Welche diskreten geometrischen Proportionen erhält man, wenn die gemeine Gleichung $3a^2 = 4\sqrt{x}$ dadurch in die entsprechende Proportionengleichung umgewandelt wird, daß 1) 0, 2) 1, 3) 3, 4) a, 5) a^2, 6) a^4, 7) 4, 8) $\sqrt{x}$,

9) x, 10) $3a^2$, 11) $\frac{3}{4}a^2$, 12) $\frac{1}{4}a^2$, 13) $\frac{1}{3}\sqrt{x}$, 14) $-2\sqrt{x}$, 15) $a^2\sqrt{x}$ und 16) $\frac{1}{3a^2}$ zum ersten Gliede der Proportion gemacht wird?

14. Welche stetigen geometrischen Proportionen erhält man aus derselben Gleichung und unter den nämlichen Bedingungen, wie in Nro. 13 von 1) bis 16)?

b. Aufgaben.

1) $x :: 10 = -2 :: 4$
$x = -5.$

2) $x^2 :: 8 = 6 :: 3$
$x = \pm 4.$

3) $2 :: 1\frac{1}{2} = \frac{1}{3}x :: 5$
$x = 20.$

4) $\frac{1}{1-x} :: (1-x) = 16a^2 :: a^2$
$x = \frac{3}{4}$ oder $\frac{5}{4}$.

5) $\sqrt{a-x} :: 4a = \frac{1}{a} :: 1$
$x = a - 16.$

6) $4 :: \frac{3}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} :: 2\sqrt{x^5}$
$x = \frac{1}{4}\sqrt[3]{9}.$

7) $4a^3b^m :: -\frac{1}{2}ab^{m-4} = (8-2x) :: (ab^2)^{-2}$

$x=8.$

8) $b :: (b+x) = (b-x) :: (b-4a^{2m})$

$x=\pm 2a^m\sqrt{b}.$

9) $4\sqrt{m} :: 3x :: 9\sqrt{m}$

$x=\pm 2\sqrt{m}.$

10) $5a :: \frac{1}{2}\sqrt{ax} :: 2$

$x=40.$

11) $\frac{4\sqrt{a}}{b} :: \sqrt{x^2-2} :: \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b$

$x=\pm 2.$

12) $\frac{2}{3} :: \sqrt{\frac{1}{2}x} = \frac{2}{3{,}75} :: 0{,}2$

$x=\frac{1}{8}.$

13) $3\frac{1}{2}a^{4+m} :: (b-x)^2 = \frac{2b}{7a} :: a^{1-m}b^{-1}$

$x=b\pm\frac{7a^3}{2b}.$

14) $\frac{4{,}5}{1-3^{-1}} :: \frac{26}{4\frac{1}{3}} :: x$

$x=5\frac{1}{3}.$

15) $\sqrt{x} :: \sqrt[3]{2x} = \sqrt[4]{3x} :: \sqrt[6]{4x}$
$x=27.$

16) $b^{-1}\sqrt[3]{b^{-1}} :: \sqrt{ax^{-1}} :: \sqrt[3]{ab}$
$x=b\sqrt[3]{a^2}.$

17) $\frac{1}{1-\sqrt{x}} :: \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{1-\sqrt{x}} :: (\sqrt{x}-1)$
$x=9.$

18) $\sqrt{2-x} :: \sqrt[3]{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} :: \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$x=-\frac{5}{2}.$

19) $a :: \sqrt{a} = \sqrt[3]{a} :: \sqrt{ax}$
$x=\sqrt[3]{a^{-4}}.$

20) $a\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}} :: \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{\sqrt{x}}} = \sqrt{a^{-3}} :: a\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}}}$
$x=a^{18}.$

21) $2\sqrt{7-x} :: 0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 10\sqrt[4]{1\frac{1}{2}} :: \frac{1}{4}\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}$
$x=3.$

22) $(4-x)^3 :: 8 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 :: x^{-3}$
$x=\pm 2.$

23) $2^{6m} : \sqrt{(25)^m} = x^{2m} : (x-3)^m$

$x=8$ und $x=4\frac{4}{5}$.

24) $\begin{cases} 2x \div \left(2-\frac{1}{2}y\right) = 8 \div \frac{3}{8}x \\ 3\frac{1}{5}x : 0{,}2y = 32 : 0{,}5 \end{cases}$

$x=4$ und $y=1$.

25) $\begin{cases} 3{,}4 : 2\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{y} : 11\frac{13}{17} \\ \left(2-\frac{1}{2}x\right) \div 0{,}4y = 2 \div 48 \end{cases}$

$x=16$ und $y=100$ oder $x=80$ und $y=20$.

26) $\begin{cases} 3\frac{1}{2} : 25\frac{25}{27} = 4\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{10}y} : \frac{3}{\sqrt{x}} \\ 4x : (2-y^{-1}) = 9y : 20 \end{cases}$

$x=0{,}09$ und $y=0{,}9$ oder $x=-0{,}2025$ und $y=-0{,}4$.

27) $\begin{cases} \sqrt{x} : \sqrt[4]{y} = \frac{1}{2} : 2 \\ \frac{3}{\sqrt{y}} : \sqrt{z} = 3 : 24 \\ \sqrt{z} : \frac{1}{\sqrt{x}} = 6 : \frac{1}{2}\sqrt{y} \end{cases}$

$x=\frac{1}{4}$; $y=16$ und $z=36$.

§. 21. Ueber Progressionen.

A. Arithmetische Progressionen.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter einer Progression? — Wann nennt man dieselbe divergirend oder zunehmend, convergirend oder abnehmend, wann endlich und wann unendlich?

2. Wann ist eine Progression arithmetisch? — Was stellen bei arithmetischen Progressionen je zwei, was je drei unmittelbar auf einander folgende Glieder vor?

3. Was versteht man unter dem Gesetze oder der Differenz einer arithmetischen Progression? — Was versteht man ferner unter dem allgemeinen Gliede, und was unter der Summenformel?

4. Wann sind alle Glieder dieser Progression positiv; wann sind alle negativ; wann sind die erstern Glieder der Progression positiv und die spätern negativ; wann sind umgekehrt die erstern Glieder negativ und die spätern positiv?

5. Wie wird jede arithmetische Progression, wenn deren erstes Glied a, die Differenz d heißt, und n die Anzahl der Glieder bedeutet, allgemein ausgedrückt und ausgesprochen?

6. Durch welche Formel wird das erste Glied (t_1 oder a), das n^{te} Glied (t_n), die Summe von n Gliedern (s_n), ferner das Gesetz der Progression oder die Differenz (d) und die Anzahl der Glieder (n) einer arithmetischen Progression bestimmt, wenn je drei von diesen fünf Größen bekannt sind?

7. Wie groß ist das mittelste Glied einer jeden arithmetischen Progression, deren erstes Glied a und deren letztes Glied t ist, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist?

8. Wie groß ist s_∞ bei einer divergirenden und bei einer convergirenden Progression?

9. Darf man die Progression auch umkehren, so daß die Progression nun mit dem letzten Gliede anfängt und mit dem ersten sich endiget?

b. Aufgaben.

Wie heißt das 41ste Glied und die Summe der 41 Glieder von folgenden arithmetischen Progressionen?

1) $-5; 4; \ldots\ldots$?
Antw. $t_{41}=355$ und $s_{41}=7175$.

2) $4a^2; 0; \ldots\ldots$?
Antw. $t_{41}=-156a^2$ und $s_{41}=-3116a^2$.

3) $(1+x); (5+3x); \ldots\ldots$?
Antw. $t_{41}=161+81x$ und $s_{41}=3321+1681x$.

4) $(5m-3); (3-5m); \ldots\ldots$?
Antw. $t_{41}=237-395m$ und $s_{41}=4797-7995m$.

5) $-4\frac{1}{2}; -1{,}4; \ldots\ldots$?

Antw. $t_{41}=119\frac{1}{2}$ und $s_{41}=2357\frac{1}{2}$.

6) $\frac{1}{4}; \frac{9}{20}; \ldots\ldots$?

Antw. $t_{41}=8\frac{1}{4}$ und $s_{41}=174\frac{1}{4}$.

Aus wie vielen Gliedern bestehen folgende arithmetische Progressionen und wie groß ist die Summe aller Glieder?

7) $1002; \ldots\ldots 10; 2$?
Antw. $n=126$ und $s_{126}=63252$.

8) $-6; 2; \ldots\ldots 186$?
Antw. $n=25$ und $s_{25}=2250$.

9) $2\frac{1}{2}x; 0,8x; \ldots\ldots -72,3x$?
Antw. $n=45$ und $s_{45}=-1570,5x$.

10) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots\ldots -24$?
Antw. $n=99$ und $s_{99}=-1163\frac{1}{4}$.

11) $(m-1); \ldots\ldots 137(1-m); 139(1-m)$?
Antw. $n=71$ und $s_{71}=4899(1-m)$.

12) $(x+254); \ldots\ldots (x+2); (x-2)$?
Antw. $n=65$ und $s_{65}=65x+8190$.

Wie heißt Differenz und Summe von folgenden arithmetischen Progressionen:

13) $100; \ldots\ldots (t_{20}=-14)$?
Antw. $d=-6$ und $s_{20}=860$.

14) $x; \ldots\ldots (t_{51}=-x)$?
Antw. $d=-\frac{x}{25}$ und $s_{51}=0$.

15) $-8; \ldots\ldots (t_{129}=2^8)$?

Antw. $d=2\frac{1}{16}$ und $s_{129}=15996$.

16) $(5-x); \ldots\ldots (t_{80}=5(1+63x))$?

Antw. $d=4x$ und $s_{80}=400+12560x$.

17) $-\frac{1}{2}; \ldots \left(t_{49}=5\frac{1}{2}\right)$?

Antw. $d=\frac{1}{8}$ und $s_{49}=122\frac{1}{2}$.

18) $150; \ldots\ldots (t_{91}=0)$?

Antw. $d=-1\frac{2}{3}$ und $s_{91}=6825$.

Wie heißt das erste Glied und die Summe aller Glieder von folgenden arithmetischen Progressionen:

19) $\ldots\ldots \left(t_{59}=-2\frac{1}{2}\right); \left(t_{60}=-1\frac{3}{4}\right)$?

Antw. $a=-46$ und $s_{60}=-1432\frac{1}{2}$.

20) $\ldots\ldots (t_{20}=93-35b); (t_{21}=98-37b)$?

Antw. $a=3b-2$ und $s_{21}=1008-357b$.

21) $.; (t_2=4) \ldots\ldots (t_{87}=-30)$?

Antw. $a=4{,}4$ und $s_{87}=-1113{,}6$.

22) $.; \left(t_2=\frac{1}{2}\right) \ldots\ldots (t_{55}=5{,}8)$?

Antw. $a=\frac{2}{5}$ und $s_{55}=170\frac{1}{2}$.

23) $\ldots.\left(t_{48}=47x-23\frac{1}{2}\right)$; $(t_{49}=24(2x-1))$?

Antw. $a=0$ und $s_{49}=1176x-588$.

24) $t_3+t_8=31$ und $t_5+t_{10}=43$?
Antw. $a=2$ und $s_{10}=155$.

25) $t_1+t_3=0$ und $t_2+t_7=40$?
Antw. $a=-8$ und $s_7=112$.

26) $t_2 \times t_7=-\frac{1}{4}$ und $t_8-t_4=-1$?

Antw. $a=\frac{1}{2}$ oder $\frac{5}{4}$ und $s_8=-3$ oder $+3$.

B. Endliche geometrische Progressionen.

a. Fragen.

1. Wann ist eine Progression geometrisch, und wann ist diese endlich? — Was bilden je zwei, was je drei unmittelbar aufeinander folgende Glieder dieser Progression?

2. Was versteht man unter dem Gesetze (dem Exponenten oder Quotienten) geometrischer Progressionen?

3. Wann sind alle Glieder einer geometrischen Progression positiv, wann sind alle negativ, wann findet Zeichenwechsel Statt?

4. Wie wird jede geometrische Progression, wenn deren erstes Glied a, der Quotient q heißt, und n die Anzahl der Glieder bedeutet, allgemein ausgedrückt und ausgesprochen?

5. Wie heißen die Formeln, durch welche das erste Glied (t_1 oder a), das n^{te} Glied (t_n), die Summe von n Gliedern (s_n) und der Quotient (q) einer geometrischen Progression von n Gliedern bestimmt werden, wenn je drei von diesen Größen gegeben sind?

6. Wie groß ist das mittelste Glied einer geometrischen Progression, wenn die Anzahl der Glieder (n) ungerade ist?

7. Darf man eine geometrische Progression auch umkehren, d. i. das erste Glied zum letzten u. s. f. machen?

b. Aufgaben.

Wie heißt in der Progression

1) $2;\ 6;\ \ldots\ t_9$ und s_9?
Antw. $t_9=13122$ und $s_9=19682$.

2) $\frac{1}{64};\ \frac{1}{16};\ \ldots\ t_{11}$ und s_{11}.

Antw. $t_{11}=16384$ und $s_{11}=21845\frac{21}{64}$.

3) $5;\ -10;\ \ldots\ t_8$ und s_8?
Antw. $t_8=-640$ und $s_8=-425$.

4) $-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \ldots\ t_7$ und s_7?

Antw. $t_7=-\frac{1}{96}$ und $s_7=-\frac{43}{96}$.

5) $a^3b^{2m-2};\ ab^{m-1};\ \ldots\ t_{21}$ und s_{21}?

Antw. $t_{21}=a^{-37}b^{18-18m}$ und $s_{21}=\frac{a^{-37}b^{19-19m}-a^5b^{2m-2}}{b^{1-m}-a^2}$.

6) $\frac{m^{10}}{x^8}$; $-\frac{m^9}{x^6}$; .... t_{14} und s_{14}?

Antw. $t_{14}=-\frac{x^{18}}{m^3}$ und $s_{14}=\frac{m^{14}x^{-8}-x^{20}}{m^3(x^2+m)}$.

7) $\sqrt{a}$; 1; .... t_{16} und s_{16}?

Antw. $t_{16}=a^{-7}$ und $s_{16}=\frac{a^{-7}-a}{1-\sqrt{a}}$.

8) $(a+b)$; $\sqrt{a+b}$; .... t_{11} und s_{11}?

Antw. $t_{11}=(a+b)^{-4}$ und $s_{11}=\frac{(a+b)^{-4}-(a+b)\sqrt{a+b}}{1-\sqrt{a+b}}$.

Wie heißt von folgenden geometrischen Progressionen das erste Glied und die Summe der Glieder:

9) ..... $(t_6=64)$; $(t_7=256)$?

Antw. $a=\frac{1}{16}$ und $s_7=341\frac{5}{16}$.

10) ..... $\left(t_8=-\frac{32}{243}\right)$; $\left(t_9=\frac{64}{729}\right)$?

Antw. $a=2\frac{1}{4}$ und $s_9=1\frac{1123}{2916}$.

11) ..... $\left(t_6=\frac{1}{3125}\right)$; $\left(t_7=-\frac{1}{15625}\right)$?

Antw. $a=-1$ und $s_7=-\frac{13021}{15625}$.

12) ..... $\left(t_{10}=\frac{1}{b^2}\sqrt[4]{b}\right)$; $(t_{11}=b^{-2})$?

Antw. $a=\sqrt{b}$ und $s_{11}=\frac{1-b^2\sqrt[4]{b^3}}{b^2(1-\sqrt[4]{b})}$.

13) .... $(t_{11}=x^{-19m})$; $(t_{12}=x^{-21m})$?

Antw. $a=x^m$ und $s_{12}=\frac{1-x^{24m}}{x^{21m}(1-x^{2m})}$.

14) .; $(t_2=-9)$; .... $(t_8=-6561)$?

Antw. $a=3$ und $s_8=-4920$ oder $a=-3$ und $s_8=-9840$.

15) .; $(t_2=\sqrt[3]{x})$; ... $\left(t_7=\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$?

Antw. $a=\sqrt{x}$ und $s_7=\frac{\sqrt[6]{x^5}-x^2}{x(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}$.

16) ..... $(t_{19}=3^{56})$; $(t_{20}=3^{59})$?

Antw. $a=3^2$ und $s_{20}=\frac{3^{62}-3^2}{26}$.

C. Unendliche geometrische Progressionen.

a. Fragen.

1. Wann heißt eine geometrische Progression unendlich; wie groß ist daher hier n oder die Anzahl aller Glieder?

2. Wie groß ist hier t_∞ bei einer divergirenden Progression; wie groß sonach die Summe aller Glieder?

3. Wie groß ist ferner hier t_∞ bei einer convergirenden Progression, wie groß mithin die Summe aller Glieder? — Ist die Summe dieser Progressionen auch dann, wenn sie umgekehrt werden, zu bestimmen?

4. Wie schreibt man jeden rein=, und jeden unrein=periodischen Decimalbruch in der Form der entsprechenden Progression? — Wie ist der Quotient solcher Progressionen beschaffen?

b. Aufgaben.

Wie groß ist die Summe der Glieder von folgenden unendlichen Progressionen?

1) $\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \ldots.$

Antw. $s_\infty = 1\frac{1}{8}$.

2) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \ldots.$

Antw. $s_\infty = 0{,}3$.

3) $256; -128; \ldots\ldots$

Antw. $s_\infty = 170\frac{2}{3}$.

4) $8; \frac{2}{3}; \ldots\ldots$

Antw. $s_\infty = 8\frac{8}{11}$.

5) $1\frac{1}{2}; 0{,}5 \ldots\ldots$

Antw. $s_\infty = 2\frac{1}{4}$.

6) $2^5; 2; \ldots\ldots$

Antw. $s_\infty = 34\frac{2}{15}$.

7) $4^3; 2^4; \ldots\ldots$

Antw. $s_\infty = 85\frac{1}{3}$.

8) $\frac{m}{x}; -\frac{m^2}{x^2}; \ldots\ldots$, wobei $m < x$

Antw. $s_\infty = \frac{m}{m+x}$.

9) $a^m; a^{-m}; \ldots\ldots$, wobei $a > 1$.

Antw. $s_\infty = \frac{a^{3m}}{a^{2m}-1}$.

10) $\sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a}$; . . . . ., wobei $a>1$.

Antw. $s_{\infty}=\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}$.

11) $2x^3$; $-0{,}25x$; . . . . ., wobei $x>1$.

Antw. $s_{\infty}=\frac{16x^5}{8x^2+1}$.

12) $\frac{4}{3}b^4$; $-\frac{1}{2b}$; . . . . ., wobei $b>1$.

Antw. $s_{\infty}=\frac{32b^9}{24b^5+9}$.

Wie heißen hiernach von folgenden periodischen Decimalbrüchen die entsprechenden gemeinen Brüche?

13) 0,444 . . . .

Antw. $\frac{4}{9}$.

14) 0,5444 . . .

Antw. $\frac{49}{90}$.

15) 0,83636 . . .

Antw. $\frac{46}{55}$.

16) 6,027027 . . . .

Antw. $6\frac{1}{37}$.

17) 1,021021 . . .

Antw. $1\frac{7}{333}$.

18) 3,01212 . . .

Antw. $3\frac{2}{165}$.

19) 8,04545 . . . .

Antw. $8\frac{1}{22}$.

20) 2,00234234 . . .

Antw. $2\frac{13}{5550}$.

21) 0,245454 . . . .

Antw. $\frac{27}{110}$.

22) 6,234545 . . .

Antw. $6\frac{129}{550}$.

§. 22. Ueber Logarithmen.

A. Logarithmirung bei Buchstaben.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter Logarithmus, was unter der Basis eines Logarithmensystemes?

2. Wie heißt die aus der Basis und dem Logarithmus entspringende dritte Zahl? — Auf welche Weise sind die ersten zwei Zahlen unter sich, und wie mit jener dritten Zahl verbunden?

3. Welche frühere Operation und Benennung ist hiermit gleichbedeutend?

4. Wie bezeichnet man nach einem bestimmten Systeme den Logarithmus von irgend einer Zahl? — Welche von den drei in Nro. 2 berührten Zahlen darf, sowohl im Schreiben als im Aussprechen, auch weggelassen werden, und wann?

5. Wann sind Logarithmen gleichartig?

6. Wie werden gleichartige Logarithmen unter einander addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt?

7. Wie wird ein Logarithmus durch eine ganze Zahl multiplicirt, dividirt, potenzirt und radicirt?

8. Was heißt eine Zahl a durch eine andere Zahl b logarithmiren?

9. Wie logarithmirt man eine Summe, eine Differenz, ein Produkt; wie einen Bruch, eine Wurzelgröße und einen Logarithmus selbst wieder?

10. Worin besteht die umgekehrte Verfahrungsart oder das Delogarithmiren?

11. Wie groß ist, wenn h die Basis eines Logarithmensystemes bedeutet, der Logarithmus von h nach diesem Systeme (vergl. Aufg. 16, 19, 25 und 26)?

12. Welche frühern Regeln können auch hier in Anwendung kommen?

Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $\log (ab)^3 + \log ab^4 = 3 (\log a + \log b) + 4 (\log a + \log b)$,

2) $\log (p+q)^{m-n} = m - n \log (p+q)$,

3) $\log \frac{2a}{5b} = \frac{\log 2 + \log a}{\log 5 + \log b}$,

4) $\log (ab)^m + \log x^4 : p = m \log (a+b) + \frac{4 \log x}{p}$,

5) $\log (a^3+b^4) - (\log a^4 + b^4) = 3 \log a + 4 \log b - 4 \log a + b^4$,

6) $\log \sqrt{ab} - \log \sqrt[3]{a^2b} = \frac{1}{2} \log a + \log b - \frac{2}{3} (\log a + \log b)$,

7) $\log \sqrt[m]{\frac{a}{\sqrt[x]{b}}} + \log \frac{m}{\sqrt[5]{a^3b^2}} = \frac{1}{m} \log a - \frac{1}{x} \log b + \log m - \frac{3 \log a - 2 \log b}{5}$,

8) $\log b^{m^3} + \log \sqrt[3]{b^{\sqrt{x}}} = 3 \log b^m + \frac{1}{3} \log \sqrt{x} \log b$,

9) $\log(2\log a) = \log 2 + \log a$,

10) $\log\log ab - \log\log a^x = \log\log a + \log\log b - x\log\log a$,

11) $2\log a + 2\log b + 3(\log a - \log b) = \log(a+b)^2 + \log\frac{a^3}{b}$,

12) $\log x - 3 + 4(\log a - \log b) = \log\frac{x}{3} + \frac{\log a^4}{\log b^4}$,

13) $3\log a \times \frac{1}{2}\log b = \log(a^3 \times b^{\frac{1}{2}})$,

14) $2\overset{b}{\log} a + 3.\overset{a}{\log} p = \log(a^2 p^3)$

gefehlt? — Wie sollte jedesmal die rechte Gleichungsseite heißen; wie müßte ferner in jedem Falle die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren oben gegebene rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) $\log(a^4b^3c) = 4\log a + 3\log b + \log c$.

2) $\log\frac{a^m b^2}{c^5 d^3} = m\log a + 2\log b - 5\log c - 3\log d$.

3) $\log\sqrt[m]{(a^6 b^x c^2)^p} = \frac{p}{m}(6\log a + x\log b + 2\log c)$.

4) $\log\left(6a^2\sqrt[5]{\frac{a^2b}{c^3d^4}}\right) = \log 6 + 2\log a + \frac{1}{5}(2\log a + \log b - 3\log c - 4\log d)$.

5) $\log\left(x^3\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{a\sqrt{b}}}\right)=3\log x+\frac{1}{3}\left(\log(a^2-b^2)-\log a\right.$
$\left.-\frac{1}{2}\log b\right)$.

6) $\log\left(a\sqrt[6]{\frac{(a^5\sqrt[3]{b})^5}{2b^4\sqrt[4]{a^3}}}\right)^4=4\left(\log a+\frac{1}{6}\left(25\log a+\frac{5}{3}\log b\right.\right.$
$\left.\left.-\log 2-4\log b-\frac{3}{4}\log a\right)\right)$.

7) $\log\sqrt[6]{\left(3a^{5-2m}\sqrt[4]{\frac{a^{m+1}}{b^{2-m}}}\right)^3}=\frac{1}{2}\left(\log 3+(5-2m)\log a\right.$
$\left.+\frac{1}{4}(m+1)\log a-\frac{2-m}{4}\log b\right)$.

8) $\log\left[a^4\sqrt[10]{\left(\frac{a^{3m-6}}{\sqrt[5]{a^{4+2m}}}:\left(\frac{a^m}{\sqrt[4]{a^3\sqrt{\frac{1}{2}ab}}}\right)^3\right)^2}\right]=4\log a$
$+\frac{1}{5}\left((3m-6)\log a-\frac{4+2m}{5}\log a-3m\log a+2\frac{1}{4}\log a\right.$
$\left.+\frac{3}{8}(\log a+\log b-\log 2)\right)$.

9) $\log\frac{1}{a\sqrt[4]{a^3b}}=-\left(\frac{7}{4}\log a+\frac{1}{4}\log b\right)$.

10) $\log\left(3(a-x)\sqrt{\frac{1}{a^2-x^2}}\right)=\log 3+\frac{1}{2}\log(a-x)$
$-\frac{1}{2}\log(a+x)$.

11) $\log \frac{a^m}{\sqrt[m]{b^m - c^m}} = m \log a - \frac{1}{m} \log (b^m - c^m).$

12) $\log \sqrt[8]{\left(\frac{3a^4\sqrt[5]{b^{-1}} \cdot \sqrt[-2]{ab^3\sqrt{a}}}{\left(9\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^5}\right)} = \frac{1}{8}\left(\frac{19}{12} \log a - 9 \log 3\right.$

$\left.- \frac{1}{30} \log b\right).$

13) $\log \log a^{2x} = \log 2 + \log x + \log \log a.$

14) $\log \log x^{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2}{3} \log a + \log \log x.$

15) $\log \log a^{x^m} = m \log x + \log \log a.$

16) $\overset{h}{\log}\, \overset{h}{\log}\, \overset{h}{\log}\, h^{p^{q^x}} = x \log q + \log \log p.$

---

17) $3 \log a + 6 \log b - \frac{1}{2} \log c = \log \frac{a^3 b^6}{\sqrt{c}}.$

18) $-\frac{2}{5}\left(\log a + 2 \log b + \frac{m+2}{3} \log c\right) = \log \sqrt[5]{(ab^2\sqrt[3]{c^{m+2}})^{-2}}$

$= \log \sqrt[5]{\left(\frac{1}{ab^2\sqrt[3]{c^{m+2}}}\right)^2}.$

19) $2 + \frac{3}{4} \overset{h}{\log} a - (m-2) \overset{h}{\log} b = 2 + \overset{h}{\log} \frac{\sqrt[4]{a^3}}{b^{m-2}} = \overset{h}{\log} \frac{h^2\sqrt[4]{a^3}}{b^{m-2}}.$

20) $$\frac{1}{5}\left(\log 2+3\log a-\frac{2}{3}\left(4\log a-\log b-\frac{1}{2}\log a\right)\right)$$

$$=\log\sqrt[5]{\left(\frac{2a^3}{\sqrt[3]{\left(\frac{a^4}{b\sqrt{a}}\right)^2}}\right)}.$$

21) $$\frac{1}{2}\log a-\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{a})=\log\sqrt[4]{\frac{a^2}{2+\sqrt{a}}}.$$

22) $$2\frac{1}{3}\left(3\log a-\frac{1}{2}\left(3\log b-\frac{1}{4}\left(\log a-\frac{1}{3}(\log b-\log a)\right)\right)\right)$$

$$=\log\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{\sqrt{b^3}}\sqrt[8]{a\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}\right)^7}.$$

23) $$\frac{1}{2}\log m+\log\log x=\log\log x^{\sqrt{m}}.$$

24) $$3\log a+\log\log b=\log\log b^{a^3}.$$

25) $$m\log x+\log\log x=\log\log x^{x^m}=\log\log\overset{h}{\log} h^{x^{x^m}}.$$

26) $$x=\overset{h}{\log} h^x=\overset{h}{\log}\,\overset{h}{\log} h^{h^x}.$$

27) $$\frac{1}{2}(\log a+\log\log b)=\log\sqrt{\log b^a}.$$

B. Logarithmirung bei Zahlen.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter Charakteristik, was unter Mantisse? — Wann ist jene, wann diese Null, wenn a) durch 10 und b) durch 4 logarithmirt wird?

2. Wie heißt in dem Logarithmensysteme, dessen Basis 10 ist, die Charakteristik von den Logarithmen folgender Zahlen: 3340; 334; 33,4; 3,34; 0,334; 0,0334; 0,000334; — 334000 und — 0,334?

3. Wie bestimmt man mit Hilfe logarithmischer (Vega'scher) Tafeln die Mantissen von den Logarithmen einer jeden mehrzifferigen Zahl?

4. Welche Aenderung erleidet der Werth einer Zahl, wenn die Charakteristik ihres Logarithmus um eine, um zwei, um drei .... Einheiten a) bloß vermehrt, b) bloß vermindert und c) sowohl vermehrt als auch vermindert wird?

5. Wie findet man umgekehrt mit Hilfe logarithmischer Tafeln die einem gegebenen Logarithmus entsprechende Zahl?

6. Wann ist diese Zahl positiv, wann negativ zu nehmen? — Oder umgekehrt, kann man negative Zahlen auch logarithmiren?

7. Sind die gewöhnlichen Logarithmentafeln zur Bestimmung des Logarithmus einer jeden vielzifferigen Zahl zureichend?

8. Wie bestimmt man annähernd im umgekehrten Falle die einem gegebenen Logarithmus, wenn dieser eine sehr große Charakteristik hat, zugehörige Zahl?

9. Was versteht man unter den gemeinen Logarithmen (logarithmi vulgares)?

10. Wie heißen auswendig die gemeinen Logarithmen der neun einzifferigen Zahlen? — Von welchen Zahlen kennt man alsdann ebenfalls die Logarithmen?

11. Wie verwandelt man einen negativen (monomischen) Logarithmus scheinbar in einen positiven (binomischen?) — Welche Verwandlung erleiden hiebei die Zahlen selbst, zu welchen jene negativen Logarithmen gehörten?

12. Was versteht man unter C. A., d. i. unter complementum arithmeticum (dekadischer Ergänzung)? — Ist dasselbe von der so eben berührten Verwandlung verschieden? — Wo und wie ist es anzuwenden?

13. Wie heißt der negative Theil des binomischen Logarithmus von einem ächten Decimalbruche nach vorgenommener a) dekadischer, b) oktadischer Ergänzung, wenn derselbe vor dieser Ergänzung α)..... —2 und β)..... —5 geheißen hat? — Wann wird in beiden Fällen dieser negative Theil nach vorgenommener Ergänzung Null, und wann sogar positiv?

14. Wie hat man zu verfahren, wenn der negative Theil eines binomischen Logarithmus zwar eine ganze Zahl, aber durch eine gegebene Zahl (Radikator) nicht theilbar ist, oder auch wenn er selbst ein Bruch ist, damit dieser negative Theil im erstern Falle eine ganze Zahl bleibe und im andern Falle eine solche werde?

15. Soll, um schneller zu rechnen, die gemischte Zahl in einen unächten gemeinen oder in einen unächten Decimalbruch verwandelt werden?

16. Wie werden Bi- und Polynomien, sie mögen als Glieder, Faktoren, Radikanden u. dgl. vorkommen, logarithmirt? — Bei welchen Rechnungsformen können also die Logarithmen unmittelbar und vortheilhaft angewendet werden?

17. Wie wird ein Logarithmus, z. B. durch 10, logarithmirt?

18. Wie wird umgekehrt ein Delogarithmus (numerus logarithmi) delogarithmirt? — Was heißt z. B. num log (num log a), oder speciel delog delog 0,3010300? — Was erhält man in letzterm Falle für die Basis 10?

19. Welche frühern Regeln kommen auch hier wieder in Anwendung?

20. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $\log 3\frac{5}{6} = \log 3 + \log 5 - \log 6,$

2) $\log 0{,}3^{0,2} = 0{,}2 \times 0{,}4771213 - 1$ $= 0{,}9542424,$ $\left\}\begin{matrix}\text{Nebenrechnung} \\ 0{,}9542426 - 0{,}2\end{matrix}\right.$

3) $\log \frac{8}{0{,}3} = 0{,}9030900 - 0{,}4771213 - 1,$

4) $\log(-2)^4 + \log(-4)^3 = \log(+16) + \log(-64)$ $= 1{,}2041200 - 1{,}8061800,$

5) $\log \log 0{,}01 = 0{,}3010300,$

6) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{0{,}6}} = \log 1 - \frac{1}{3} \log 0{,}6$ $= 0{,}2593838 - 0{,}3333333,$ $\left\}\begin{matrix}\text{Nebenrechnung} \\ \frac{0{,}7781513 - 1}{3}\end{matrix}\right.$

7) $\text{C. A.} \log 3^5 = 5 \text{ C. A.} \log 3,$

8) $\text{C. A.} \log 0{,}5 = 1 - \log 0{,}5 - 1$ $= 0{,}3010300 - 2,$ $\left\}\begin{matrix}\text{Nebenrechnung} \\ 1 - 0{,}6989700 - 1 - 1\end{matrix}\right.$

9) $3\sqrt[6]{0{,}8} = \log 3 + \frac{1}{6} \log 0{,}8,$

10) $\log \sqrt[6]{2+\sqrt[7]{3}} = \sqrt[6]{2 + \text{num} \log \sqrt[7]{3}},$

11) $\sqrt[12]{3} - 8\sqrt[13]{5} = \text{num} \frac{1}{12} \log 3 - (\text{num} \log 8 + \frac{1}{13} \log 5)$

gefehlt, wenn hier, sowie in den nachfolgenden Aufgaben, überall die gemeinen Logarithmen gelten? — Wie müßte jedesmal die linke Gleichungsseite geschrieben werden, damit aus ihr deren oben gegebene rechte Seite hervorgehen könnte?

b. Aufgaben.

1) log 12=1,0791812.

2) log 1200=3,0791812.

3) log 1,2=0,0791812.

4) log 0,012=0,0791812—2.

5) log 1268=3,1031193.

6) log 358,4=2,5543680.

7) log 43,22=1,6356848.

8) log 6,687=0,8252313.

9) log 0,9055=0,9568885—1.

10) log 85762=4,9332949.

11) log 0,076287=0,8824505—2.

12) log 2,34765=0,3706334.

13) log 334,588=2,5245104.

14) log 1256798=6,0992655.

15) log 44206390=7,6454850.

16) log 0,50239678=0,7010468−1.

17) log $\frac{30}{29}$ = 0,0147233.

18) log $\left(4\frac{5}{9}\right)$=0,6585414.

19) log $\frac{6}{7}$=0,9330533−1.

20) log $\left(236\frac{3}{11}\right)$=2,3734136.

21) log $\frac{1}{10}$=0,0000000−1.

22) log $\frac{1}{225}$=0,6478175−3.

23) log $\frac{116}{345}$=0,5266389−1.

24) log 9^8=7,6339400.

25) log 2^{12}=3,6123600.

26) log $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$=0,7506130−2.

27) log $\left(1\frac{5}{12}\right)^{24}$=3,6304248.

28) log $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$=0,2878700−48.

29) $\log\left(236\frac{1}{2}\right)^8=18,9906488.$

30) $\log\,(12528)^{20}=81,9576340.$

31) $\log\,(4,26)^9=5,6646864.$

32) $\log\,(0,467)^8=0,3545352-3.$

33) $\log\,(0,0558)^6=0,4798052-8.$

34) $\log\,(0,0024)^{16}=0,0833792-42.$

35) $\log\,(23,6\times428,79)=4,0051566.$

36) $\log\,((0,73)^2\times38,442)=1,3114518.$

37) $\log\,((982,3)^4\times(0,208)^5)=8,5592929.$

38) $\log\frac{(0,43)^6\times(28,3)^5}{235,8}=2,6871992.$

39) $\log\frac{(77,88\times3,4056)^{11}}{(0,125)^7\,.\,(19,3)^{10}}=20,1258715.$

40) $\log\frac{38,726\times2,45198}{0,228695\times(0,185)^6}=7,0152327.$

41) $\log\left(\frac{23,51}{0,9109}\times\left(\frac{0,7786}{14,23}\right)^8\right)=0,3166579-9.$

42) $\log\sqrt[3]{7}=0,2816993.$

43) $\log\,(8\sqrt[5]{286})=1,3943632.$

44) $\log\sqrt[6]{2,01487}=0,0507078.$

45) $\log\sqrt[12]{0,8}=0,9919242-1.$

46) $\log\left(3^7\sqrt[9]{(0{,}0365)^7}\right)=2{,}2216325.$

47) $\log\sqrt[8]{\frac{325}{779}}=0{,}9525432-1.$

48) $\log\sqrt[30]{\frac{1}{15}}=0{,}9607969-1.$

49) $\log\sqrt[10]{\left(\frac{0{,}6324}{235\frac{3}{7}}\right)^9}=0{,}6862194-3.$

50) $\log\sqrt[15]{\frac{(2{,}03)^8\times(0{,}005)^7}{(423{,}4)^{11}}}=0{,}1638999-3.$

51) $\log\sqrt[60]{0{,}6879\sqrt[7]{0{,}9}}=0{,}9971831-1.$

52) $\log\sqrt[9]{\left(2\frac{1}{4}\sqrt[5]{3{,}4}\right)^8}=0{,}4075362.$

53) $\log\sqrt[7]{\frac{287\sqrt[3]{0{,}05}}{0{,}68\sqrt[5]{0{,}1}}}=0{,}3416709.$

54) $\log\sqrt[11]{0{,}58\sqrt[10]{2\sqrt[9]{3\frac{1}{4}}}}=0{,}9817471-1.$

55) $\log\left(0{,}3\sqrt[8]{(0{,}0563698\sqrt[6]{2{,}303})^5}\right)=0{,}7342643-2.$

56) $\log\sqrt[0{,}7]{\frac{(0{,}482)^5\sqrt[6]{0{,}7}}{3\sqrt[10]{10}}}=0{,}8747096-4.$

57) $\log \sqrt[-5]{\frac{0{,}0008^{11} \cdot \sqrt[8]{\frac{5}{6}}}{(0{,}233\sqrt[4]{7{,}7})^6}}=6{,}3219558.$

58) $\log\log 1=-\infty$.

59) $\log\log 2=0{,}4786098-1$.

60) $\log\log 9=0{,}9796587-1$.

61) $\log\log 1004=0{,}4773722$.

62) $\log\log 56{,}378=0{,}2433133$.

63) $\log\log 1{,}02=0{,}9345086-3$.

64) $\log\log 10^{100}=2{,}0000000$.

65) $\log\log (2{,}864)^9=0{,}6141330$.

66) $\log\log \sqrt[8]{300}=0{,}4908573-1$.

67) $\log\log \frac{\log 2836}{\log 39{,}5}=0{,}5249985-1$.

68) $\log\log 8^{\log 6}=0{,}8467950-1$.

69) $\log\log \sqrt[5]{\log 12}=0{,}9207872-3$.

70) $\log\log \sqrt[\log 9]{\left(4\frac{1}{4}\right)^{\log 7}}=0{,}7454769-1$.

71) $\log\log\log 9^{9^9}=0{,}9328714$.

72) $\log\log\log\log 10=?$

73) num log 4,8560398=71786.

74) num log 7,8970109=78888000.

75) num log 0,0274719=1,0653.

76) num log (0,1942090—1)=0,15639.

77) num log 6,2381457=1730397,2...

78) num log 0,1028477=1,267207...

79) num log (0,8927612—2)=0,0781198...

80) num log (0,4442108—4)=0,0002781062...

81) num log (—0,3778207)=0,4189664...

82) num log (—2,6567900)=0,002203991...

83) num log (—4,0000000)=0,0001.

84) num log $\frac{3}{8}$=2,3713738...

85) num log $\left(-\frac{124}{537}\right)$=0,5876076.

86) num log $\sqrt{6}$=281,50725...

87) num log $\sqrt[7]{0,4}$=7,538877...

88) num log log 0,4773094=1002,998...

89) num log log (0,8860978—2)=1,193796...

90) num log log (—0,2109376)=4,1234909...

91) num log log 1,0000000=10^{10}.

92) num log log $\frac{1}{7}$=24,518567...

C. Berechnung wirklicher Zahlenausdrücke.

1) $\sqrt[11]{9}=1,2210945\ldots$

2) $\sqrt[10]{34,567}=1,425168\ldots$

3) $\sqrt[9]{0,08}=0,7553028\ldots$

4) $\sqrt[7]{\frac{5}{23}}=0,8041189\ldots$

5) $\sqrt[12]{3826\frac{7}{20}}=1,988682\ldots$

6) $\sqrt[5]{34056\frac{3}{4}}=8,06196\ldots$

7) $6\sqrt[8]{3\frac{1}{2}}=7,017133\ldots$

8) $\sqrt[13]{-0,00357}=-0,6482517\ldots$

9) $\sqrt[5]{\frac{13}{16}}=0{,}959322\ldots$

10) $\sqrt[20]{\left(\frac{4}{7}\right)^9}=0{,}7773791\ldots$

11) $\sqrt[8]{\left(2\frac{1}{8}\right)^{70}}=731{,}7965\ldots$

12) $\sqrt[6]{\left(\frac{16}{17}\right)^5\times\left(\frac{1}{20}\right)^9}=0{,}0106295\ldots$

13) $\sqrt[0,8]{(2{,}3456)^{-9}}=0{,}0000683349\ldots$

14) $\frac{1}{(3{,}482)^5\times(0{,}05)^6}=125036{,}28\ldots$

15) $\left(1\frac{1}{8}\right)^{21}=11{,}86321\ldots$

16) $\left(317\frac{3}{4}\right)^{0,6}=31{,}71402\ldots$

17) $\left(3\frac{1}{7}\right)^{15}\times(0{,}28314)^{0,7}=11919866,\ldots$

18) $(0{,}627839)^{-0,12}\times(9{,}012)^{0,06}=1{,}2065558\ldots$

19) $((2{,}358679)^7\times0{,}500897)^{2\frac{1}{6}}=100369{,}1\ldots$

20) $\frac{(883{,}04)^{0{,}1}\times(0{,}056)^{\sqrt{0{,}8}}}{(0{,}3980264)^{10}}=1499{,}082\ldots$

21) $\left(\frac{234\frac{1}{9}}{0{,}5867}\right)^{5}:\left(\frac{(2{,}334)^{4}}{2163\frac{4}{5}}\right)^{-6}=67{,}32069\ldots$

22) $\sqrt[5]{2\frac{1}{3}\sqrt[4]{6}}=1{,}295695\ldots$

23) $\sqrt[9]{0{,}8654\sqrt{3{,}26}}=1{,}0026987\ldots$

24) $253\sqrt[3]{\frac{716{,}5}{\sqrt{2}}}=2016{,}914\ldots$

25) $\left(2\sqrt[5]{\frac{0{,}2\sqrt[4]{6}}{3\sqrt[3]{0{,}3}}}\right)^{2}=1{,}90176\ldots$

26) $\frac{(0{,}9)^{-6}\times5^{0{,}4}}{2\sqrt[3]{7}}=0{,}9362754\ldots$

27) $0{,}04\sqrt[6]{\frac{3\sqrt{2}}{(0{,}8)^{5}}}=0{,}0612949\ldots$

28) $\frac{10^{6}}{0{,}0780569\times36\frac{5}{16}}=352803{,}16\ldots$

29) $\frac{785{,}8\times(85{,}06)^{2}}{5{,}089\times368{,}4\times78{,}96}=38{,}4064\ldots$

30) $\dfrac{0{,}857 \times 3{,}128}{964{,}3 \times 0{,}04856 \times (0{,}328)^2} = 0{,}5321192\ldots$

31) $\dfrac{28{,}086 \times (7{,}86)^3}{1518\frac{3}{8} \times 0{,}79854 \times (40{,}082)^2} = 0{,}00700137\ldots$

32) $0{,}4\sqrt[9]{\dfrac{3\frac{1}{2}\sqrt{0{,}03}}{(0{,}6)^3\sqrt[3]{\frac{3}{5}}}} = 0{,}4571658\ldots$

33) $\dfrac{\sqrt[5]{387 \times 0{,}865 \times (783)^3}}{0{,}586 \times 378\frac{1}{2} \times 9\frac{5}{8}} = 719228,\ldots.$

34) $\dfrac{7\frac{1}{2}\sqrt[4]{(0{,}08)^3 \times 55}}{746{,}482 \times 1002\frac{3}{4} \times \sqrt[5]{0{,}0078}} = 0{,}00001083524\ldots$

35) $\sqrt[11]{0{,}43\sqrt[10]{8\sqrt[7]{0{,}7}}} = 0{,}943382\ldots$

36) $\sqrt[9]{\dfrac{347\sqrt[7]{0{,}0073}}{126\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}} = 1{,}066627\ldots$

37) $\dfrac{(5207{,}2)^{13} \cdot \sqrt{(0{,}000734)^3}}{(255608)^8} = 2{,}25842\ldots$

38) $\dfrac{\sqrt[6]{23{,}476} \times \sqrt[8]{(0{,}213)^7}}{(4{,}0296)^5 \times \sqrt[4]{3456\frac{1}{4}}} = 0{,}0000536795\ldots$

39) $4\sqrt[4]{4-\sqrt[4]{4}}=5{,}072338\ldots$

40) $\sqrt[6]{8-\sqrt[5]{10}}=1{,}36312\ldots$

41) $\sqrt[8]{21+\sqrt[6]{19}}=1{,}476875\ldots$

42) $\sqrt[8]{(1{,}4782)^3-\sqrt[10]{0{,}08}}=1{,}118706\ldots$

43) $\sqrt[20]{12}+\frac{1}{8}\sqrt[16]{0{,}9}=1{,}2564731\ldots$

44) $(6\sqrt[7]{34}-2\sqrt[5]{10})^7=645008{,}3\ldots$

45) $(3{,}625)^6-(0{,}9286)^9=2268{,}557097\ldots$

46) $\frac{(2{,}04)^8}{(3{,}26)^7}+\left(\frac{1213{,}5}{78{,}56}\right)^6=13584065{,}07665\ldots$

47) $\frac{(30+(1{,}2684)^{13})^{13}}{(28619\frac{1}{8})^5}=1{,}05744\ldots$

48) $\frac{(0{,}234)^4\times\sqrt[5]{0{,}2}}{(0{,}1)^3\times\sqrt[6]{0{,}1}}=3{,}1896007\ldots$

49) $\frac{(0{,}28456)^{0{,}5}\times(3{,}4798)^3}{1\frac{1}{8}\sqrt[0{,}2]{1\frac{5}{8}}}=1{,}763316\ldots$

50) $\dfrac{5^{12}\times(542{,}36)^{-4}\sqrt[-8]{(0{,}04)^3}}{4^{-6}\times\sqrt[5]{(0{,}20287)^4}\times\sqrt[0{,}4]{7}}=1{,}0679658.$

51) $\dfrac{\sqrt[7]{4{,}32615\sqrt[6]{(0{,}8\sqrt[3]{2})^5}}}{(0{,}05)^{0{,}7}\times\sqrt{0{,}01\sqrt[5]{3}}}=90{,}0097\ldots$

52) $8\sqrt[10]{\dfrac{(7{,}5)^9\times\sqrt[-5]{0{,}8\sqrt{2}}}{(0{,}5)^{-0{,}2}\sqrt[8]{(3\sqrt{0{,}4})^{-1}}}}=48{,}644\ldots$

53) $\dfrac{1}{7}\sqrt[60]{\dfrac{(0{,}02)^3}{4\sqrt[5]{2}}\times\sqrt[0{,}2]{\left(\dfrac{(0{,}7)^2\sqrt[10]{0{,}005}}{3\frac{1}{4}\sqrt[6]{(2-\sqrt[9]{0{,}3})}}\right)}}=0{,}093444764\ldots$

54) $\sqrt[20]{\dfrac{(\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{5}})^3}{(0{,}05)^{-0{,}2}}\times\sqrt[7]{0{,}6+\sqrt[1{,}5]{\dfrac{70895}{(3\sqrt[4]{6})^8}}}}=0{,}66347876\ldots$

55) $(0{,}04)^{13}\times\left(\sqrt[0{,}5]{\dfrac{7\frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt[5]{0{,}2})}}{(1{,}2)^{0{,}2}\times\sqrt[6]{0{,}8}}}+\sqrt[8]{\dfrac{1{,}2579\sqrt[6]{4{,}04}}{\sqrt[9]{12\sqrt{3}}-\sqrt[7]{0{,}45867}}}\right)^9=4{,}5305\ldots$

D. Logarithmische Gleichungen.

a. Fragen.

1. Was versteht man unter logarithmischen Gleichungen?

2. Worin besteht die Reduktion und Solution dieser Gleichungen?

3. Verfährt man richtig, wenn auf jeder Gleichungsseite Glied für Glied logarithmirt, oder delogarithmirt wird?

4. Wann kann man die Logarithmenzeichen auf beiden Gleichungsseiten weglassen?

5. Wann verlangt die Auflösung solcher Gleichungen das Delogarithmiren? — Welchen Werth erhält man z. B. für x, a) wenn $\log x = m$, oder b) wenn $3 \log x = n$ ist?

6. Wann darf man log 10 anstatt 1, log 100 anstatt 2 u. dgl. substituiren? — (Vergl. Aufg. 26, 27, 28 u. 29.)

7. Welche frühern Regeln und Operationen finden hier wieder Anwendung?

8. Wo und warum ist in folgenden Beispielen:

1) $\log 5x - \log 2x = 8 \log b - 3 \log b$

$\log 3x = 5 \log b$,

2) $\frac{1}{2} \log x + \log a = \frac{1}{3} \log 2x$

$\log 3x + \log 6a = \log 4x$,

3) $\log \frac{x}{3} - \log a = \log \frac{x}{4}$

$\log 4x - \log 12a = \log 3x$,

4) $\log(a+b) = \sqrt{x}$

$\log(a+b)^2 = x,$

5) $(x+a)^3 = \log a^6$

$x+a = \log a^2,$

6) $a^{m^x} = bc^m$

$x \log a^m = m(\log b + \log c),$

7) $a^{\sqrt{x}} = 3m^{-2}$

$\sqrt{x} \log a = -6 \log m,$

8) $a^{2x} + b^x = q$

$2x \log a + x \log b = \log q,$

9) $-\log x = \log 2^3$

$-x = 2^3,$

10) $\log x = \log 4 + \log 5$

$x = 4+5,$

11) $\log a^{\sqrt[x]{m}} = \log b^2$

$a^m = b^{2^x},$

12) $\overset{8}{\log} a + 2 = \overset{8}{\log} x$

$\log a + \log 100 = \log x$

gefehlt? — Wie sollte der angewandten Operation gemäß die deducirte Gleichung heißen, und wie müßte die gegebene oder zu reducirende Gleichung umgeändert werden, damit aus ihr die oben deducirten wirklich hervorgehen könnten?

b. Aufgaben.

1) $4096^x = 8 \times 64^{-x}$

$$x = \frac{1}{6}.$$

2) $\left(\frac{1}{0,4}\right)^x = 6,25$

$$x = 2.$$

3) $\sqrt[20]{(5,0625)^x} = 1\frac{1}{2}$

$$x = 5.$$

4) $\sqrt[x]{8192 \times 128} = \frac{1}{16}$

$$x = -5.$$

5) $a^x b^x = m$

$$x = \frac{\log m}{\log a + \log b}.$$

6) $a^{mx} b^{2x} = c$

$$x = \frac{\log c}{m \log a + 2 \log b}.$$

7) $ab^{\sqrt{x}}=a^m$

$$x=\left(\frac{(m-1)\log a}{\log b}\right)^2.$$

8) $\sqrt[mx]{a^3\sqrt{b}}=q$

$$x=\frac{6\log a+\log b}{2m\log q}.$$

9) $a^{3x}b^{4-x}=c^{2x-1}$

$$x=\frac{4\log b+\log c}{2\log c+\log b-3\log a}.$$

10) $a^x b^{mx}=c^{1-3x}$

$$x=\frac{\log c}{\log a+m\log b+3\log c}.$$

11) $(a^x b^3)^x=b^{3x+2}$

$$x=\pm\sqrt{\frac{2\log b}{\log a}}.$$

12) $\sqrt[x]{ab^m}=\sqrt{p}$

$$x=\frac{2\log ab^m}{\log p}.$$

13) $a^x b^{\sqrt{x}}=c$

$$x=\left(\frac{-\log b\pm\sqrt{4\log a\log c+(\log b)^2}}{2\log a}\right)^2.$$

14) $p^{6x}+mp^{3x}=q$

$$x=\frac{\log(-m\pm\sqrt{m^2+4q})-\log 2}{3\log p}.$$

15) $24a^x-6a^{2x}+30=0$

$$x=\frac{\log(2\pm3)}{\log a}.$$

16) $ab^{2x}-a^2b^x=a^m$

$$x=\frac{\log(a\pm\sqrt{4a^{m-1}+a^2})-\log 2}{\log b}.$$

17) $a^3+ab^{2x}=2a^2b^x$

$$x=\frac{\log a}{\log b}.$$

18) $3.4^{4x}-46=\frac{1}{2}.4^{2x}$

$$x=\frac{1}{2}.$$

19) $b^{6\sqrt{x}-3x}=b\sqrt[3]{b^2}$

$$x=\left(1\pm\frac{2}{3}\right)^2.$$

20) $b^{a^x}=c$

$$x=\frac{\log\log c-\log\log b}{\log a}.$$

21) $a^{\sqrt[x]{b}}=m$

$$x=\frac{\log b}{\log\log m-\log\log a}.$$

22) $ab^{x^2}=p$

$$x=\pm\sqrt{\frac{\log p-\log a}{\log b}}.$$

23) $\sqrt[x+m]{a^{mx+1}}=b$

$$x=\frac{m\log b-\log a}{m\log a-\log b}.$$

24) $\begin{cases} b^x+b^y=m \\ b^x-b^y=n \end{cases}$

$$x=\frac{\log(\frac{1}{2}(m+n))}{\log b} \text{ und } y=\frac{\log(\frac{1}{2}(m-n))}{\log b}.$$

25) $\log(6a-b^{x^2})=\log a+\log 3$

$$x=\pm\sqrt{\frac{\log 3a}{\log b}}.$$

26) $\overset{10}{\log} m-\frac{1}{4}\overset{10}{\log}(a^{3x}+p)=1-\overset{10}{\log} b$

$$x=\frac{\log\left(\left(\frac{bm}{10}\right)^4-p\right)}{3\log a}.$$

27) $2\overset{10}{\log} a + \overset{10}{\log} b = \frac{1}{2} x \overset{10}{\log} m^{\sqrt{x}} - 2$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{2\log(100a^2b)}{\log m}\right)^2}.$$

28) $2\overset{10}{\log}(2 - a^{\sqrt{3x}}) + 0,9542425 = 6\overset{10}{\log} b$

$$x = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\log(6 \mp b^3) - \log 3}{\log a}\right)^2.$$

29) $\frac{1}{5m}(\overset{10}{\log} a + 0,9030900) + \overset{10}{\log}(a + p^x) = \frac{1}{m}$

$$x = \log\left(\sqrt[m]{\frac{10}{\sqrt[5]{8a}}} - a\right) : \log p.$$

30) $\sqrt[7]{a^{\log x}} = bx^m$

$$x = \text{num}\log\left(\frac{7\log b}{\log a - 7m}\right).$$

31) $6^{2x+4} = 3^{3x} \times 2^{x+8}$

$x = 4.$

32) $4^{2\sqrt{x}} = 2^{2x-6}$

$x = 5 \pm 4$ oder $x = (1 \pm 2)^2$.

33) $\left(\frac{8^x}{8}\right)^x = 2^{3x+9}$

$x = 1 \pm 2.$

34) $\left(\frac{1}{64}\right)^{2-x}=\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$

$x=3.$

35) $5^{\sqrt[x]{2}}=625$

$x=\frac{1}{2}.$

36) $4^x=\sqrt[x]{262144}$

$x=\pm 3.$

37) $\sqrt[x+5]{13^{5x-17}}=\frac{1}{169}$

$x=1.$

38) $\left(1\frac{5}{7}\right)^x\times\sqrt{\left(1\frac{1}{6}\right)^{3x}}=21\frac{7}{9}$

$x=4.$

39) $\begin{cases} 8^x+10.9^y=40058 \\ 8^x-2.9^y=31310 \end{cases}$

$x=5$ und $y=3.$

40) $\log 218=\log(36^{5x}+2688)-\log 48$

$x=\frac{1}{2}.$

41) $\log 10 + \frac{1}{3} \log (271 + 3^{\sqrt{2x}}) = 2$

$x = 18.$

42) $(56)^{\log x} = 3136$

$x = 100.$

43) $7^{\log x} = 5{,}7969514$

$x = 8.$

44) $(0{,}39)^{\log x} = \text{num} \log (0{,}9553230 - 3)$

$x = 100000.$

45) $(\overset{10}{\log} x)^2 + \overset{10}{\log} x = 20$

$x = 10000$ und $x = 0{,}00001.$

46) $2 (\overset{10}{\log} x)^2 - \overset{10}{\log} x = 6$

$x = 100$ und $x = \sqrt{0{,}001}.$

47) $x^{2 + \overset{10}{\log} x} = 10000$

$x = 100$ und $x = 0{,}0001.$

48) $x^{-1 + \log x} = 10^2$

$x = 100$ und $x = 0{,}1.$

49) $x^{a+\log x} = 10^n$

$x = \sqrt{\left(10^{-a \pm \sqrt{a^2+4n}}\right)}.$

50) $2^{2x} \times 3^{3x} \times 8 = 6^{3x}$

$x = 3.$

51) $\frac{3^{ax} \times 5^{bx}}{(0,6)^{ax}} = 5^a$

$x = \frac{a}{a+b}.$

52) $\sqrt[x]{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt[x]{8}} \times \sqrt[4x]{4\sqrt{2}} = 4\sqrt[4]{2 . 6^{2x^{-1}}}$

$x = \frac{1}{2}.$

53) $a^{x^2-9x+19} = a^5$

$x = 7$ und $x = 2.$

54) $3^{x^2-x-16} = \frac{1}{81}$

$x = 4$ und $x = -3.$

55) $\sqrt{4^{x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}}} = \sqrt[8]{2}$

$x = \frac{3}{2}$ und $x = -\frac{1}{4}.$

56) $b^{x^2-3ax-a^2x+2a^2} = \left(\frac{1}{b^{a^3}}\right)^2$

$x = 2a$ und $x = a + a^2.$

Anhang.

Ad pag. 56.

Einzuschalten nach Aufgabe 2)

3) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{aa+bb}{ab}$.

nach Aufg. 10)

11) $\frac{2a}{b}+\frac{3b}{a}+\frac{aa+bb}{ab}-\frac{3aaa+bbb}{aab}+\frac{bb}{a}=\frac{4b}{a}$.

12) $4x-\frac{20xx-13x}{5x-3}+1=\frac{6x-3}{5x-3}$.

Ad pag. 62.

Einzuschalten nach Aufg. 25)

26) $\frac{6aa-8ab+10ac}{9abc-12bbc+15bcc}=\frac{2a}{3bc}$.

27) $\frac{4bc-12bb-ac-3ab}{4bc+12bb-ac-3ab}=\frac{c-3b}{c+3b}$.

28) $\frac{mmm-mmx+mxx-xxx}{2m-2x}=\frac{mm+xx}{2}$.

29) $\frac{15+2x-xx}{xxx+xx-6x}=-\frac{x-5}{x(x-2)}$.

30) $\frac{aa+2a+1}{aa-1}=\frac{a+1}{a-1}$.

31) $\frac{aa+a}{aa+2a+1}=\frac{a}{a+1}$.

32) $\frac{3mmm+2mm-8m}{mmm+4mm+4m}=\frac{3m-4}{m+2}$.

33) $\frac{aa+7a+12}{aa+a-12}=\frac{a+3}{a-3}$.

Ad pag. 77.

Einzuschalten nach Aufg. 40)

41) $(a^n-b^n):(a-b)=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\ldots$ $(+b^{n-1}$ wann?).

42) $(a^{mn}-b^{mn}):(a^m-b^m)=a^{(n-1)m}+a^{(n-2)m}b^m$ $+a^{(n-3)m}b^{2m}+\ldots(+b^{(n-1)m}$ wann?).

43) $(a^{mn}-b^{pn}):(a^m-b^p)=a^{(n-1)m}+a^{(n-2)m}b^p+a^{(n-3)m}b^{2p}+\ldots$ $(+b^{(n-1)p}$ wann?).

44) $(a^5-b^5):(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$.

45) $(a^6-b^6):(a-b)=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$.

46) $(a^{-n}-b^{-n}):(a^{-1}-b^{-1})=a^{-(n-1)}+a^{-(n-2)}b^{-1}$ $+a^{-(n-3)}b^{-2}+\ldots(+b^{-(n-1)}$ wann?).

47) $(a^{-5}-b^{-5}):(a^{-1}-b^{-1})=a^{-4}+a^{-3}b^{-1}+a^{-2}b^{-2}+a^{-1}b^{-3}$ $+b^{-4}$.

48) $(b^{-n}-a^{-n}):(a^{1-n}b^{-n}-a^{-n}b^{1-n}=$ Vergl. Aufg. 41.

49) $(b^{-5}-a^{-5}):(a^{-4}b^{-5}-a^{-5}b^{-4})=$ Vergl. Aufg. 44.

50) $(b^{n}-a^{n}):(a^{n-1}b^{n}-a^{n}b^{n-1})=$ Vergl. Aufg. 46.

51) $(b^{5}-a^{5}):(a^{4}b^{5}-a^{5}b^{4})=$ Vergl. Aufg. 47.

52) $(a^{12}-b^{9}):(a^{4}-b^{3})=a^{8}+a^{4}b^{3}+b^{6}$.

53) $(a^{n}-b^{n}):(a+b)=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}-\ldots$
$(-b^{n-1}$ wann?).

54) $(a^{2np}-b^{2nq}):(a^{p}+b^{q})=a^{(2n-1)p}-a^{(2n-2)p}b^{q}$
$+a^{(2n-3)p}b^{2q}-\ldots(-b^{(2n-1)q}$ wann?).

55) $(a^{4}-b^{4}):(a+b)=a^{3}-a^{2}b+ab^{2}-b^{3}$.

56) $(a^{12}-b^{12}):(a^{3}+b^{3})=a^{9}-a^{6}b^{3}+a^{3}b^{6}-b^{9}$.

57) $(a^{-n}-b^{-n}):(a^{-1}+b^{-1})=a^{-(n-1)}-a^{-(n-2)}b^{-1}$
$+a^{-(n-3)}b^{-2}-\ldots(-b^{-(n-1)}$ wann?)

58) $(a^{-6}-b^{-6}):(a^{-1}+b^{-1})=a^{-5}-a^{-4}b^{-1}+a^{-3}b^{-2}-a^{-2}b^{-3}$
$+a^{-1}b^{-4}-b^{-5}$.

59) $(b^{-n}-a^{-n}):(a^{1-n}b^{-n}+a^{-n}b^{1-n})=$ Vergl. Aufg. Nr. 53.

60) $(b^{-4}-a^{-4}):(a^{-3}b^{-4}+a^{-4}b^{-3})=$ Vergl. Aufg. Nr. 55.

61) $(b^{n}-a^{n}):(a^{n-1}b^{n}+a^{n}b^{n-1})=$ Vergl. Aufg. Nr. 57.

62) $(b^{6}-a^{6}):(a^{5}b^{6}+a^{6}b^{5})=$ Vergl. Aufg. Nr. 58.

63) $(a^{12}-b^{6}):(a^{2}+b)=a^{10}-a^{8}b+a^{6}b^{2}-a^{4}b^{3}+a^{2}b^{4}-b^{5}$.

64) $(a^{n}+b^{n}):(a+b)=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}-a^{n-4}b^{3}+\ldots$
$(+b^{n-1}$ wann?).

65) $(a^{(2n-1)p}+b^{(2n+1)q}):(a^p+b^q)=a^{2np}-a^{(2n-1)p}b^q$
$+a^{(2n-2)p}b^{2q}-\ldots(+b^{2nq}$ wann?).

66) $(a^3+b^3):(a+b)=a^2-ab+b^2$.

67) $(a^{15}+b^{15}):(a^5+b^5)=a^{10}-a^5b^5+b^{10}$.

68) $(a^9+b^6):(a^3+b^2)=a^6-a^3b^2+b^4$.

69) $(a^{-n}+b^{-n}):(a^{-1}+b^{-1})=a^{-(n-1)}-a^{-(n-2)}b^{-1}$
$+a^{-(n-3)}b^{-2}-a^{-(n-4)}b^{-3}+\ldots(+b^{-(n-1)}$ wann?).

70) $(a^{-10}+b^{-10}):(a^{-2}+b^{-2})=a^{-8}-a^{-6}b^{-2}+a^{-4}b^{-4}$
$-a^{-2}b^{-6}+b^{-8}$.

71) $(b^{-n}+a^{-n}):(a^{1-n}b^{-n}+a^{-n}b^{1-n})=$ Vergl. Nr. 64.

72) $(b^n+a^n):(a^{n-1}b^n+a^nb^{n-1})=$ Vergl. Nr. 69.

73) $(b^{10}+a^{10}):(a^8b^{10}+a^{10}b^8)=$ Vergl. Nr. 70.

74) $(a^n+b^n):(a-b)=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\ldots$

75) $(a^4+b^4):(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3+2a^{-1}b^4+\ldots$

76) $(a^{-12}+b^{-9}):(a^{-4}-b^{-3})=a^{-8}+a^{-4}b^{-3}+b^{-6}+\ldots$

77) $(b^{-n}+a^{-n}):(a^{1-n}b^{-n}-a^{-n}b^{1-n})=$ Vergl. Nr. 74.

78) $(b^{-4}+a^{-4}):(a^{-3}b^{-4}-a^{-4}b^{-3})=$ Vergl. Nr. 75.

79) $(b^9+a^{12}):(a^8b^9-a^{12}b^6)=$ Vergl. Nr. 76.

Der Divisor wird rational; ad §. 12. C. pag. 119.

Schreibt man in den nachstehenden Aufgaben die Wurzelgrößen in der Form von Potenzen, so können diese Aufgaben auch sogleich an die Potenzen (C. §. 11.) angereiht werden.

80) $$\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a+\sqrt{ab}+b.$$

81) $$\frac{a^3-b^3}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a^6}-\sqrt{b^6}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a^2\sqrt{a}+a^2\sqrt{b}+ab\sqrt{a}$$
$$+ab\sqrt{b}+b^2\sqrt{a}+b^2\sqrt{b}.$$

82) $$\frac{a^n-b^n}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{a^{mn}}-\sqrt[m]{b^{mn}}}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{a^{mn-1}}+\sqrt[m]{a^{mn-2}b}$$
$$+\sqrt[m]{a^{mn-3}b^2}+\ldots+\sqrt[m]{b^{mn-1}}.$$

83) $$\frac{1}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{a-b}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}=\frac{1}{a-b}\cdot\Big(\sqrt[m]{a^{m-1}}$$
$$+\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\sqrt[m]{a^{m-3}b^2}+\ldots+\sqrt[m]{b^{m-1}}\Big).$$

84) $$\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{b^3}}=\frac{a-b}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}}$$
$$=\frac{a-b}{x-y}\cdot\Big(\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[6]{x^4y}+\sqrt[6]{x^3y^2}+\sqrt[6]{x^2y^3}+\sqrt[6]{xy^4}+\sqrt[6]{y^5}\Big)$$
$$=\frac{a-b}{a^2-b^3}\cdot\Big(a\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[6]{a^2b^3}+ab+b\sqrt[6]{a^4b^3}+b^2\sqrt[3]{a}$$
$$+b^2\sqrt{b}\Big).\quad\Big|\begin{array}{l}x=a^2\\ y=b^3\end{array}$$

19*

85) $$\frac{a-b}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{a-b}{\sqrt[mn]{a^n}-\sqrt[mn]{b^m}}=\frac{a-b}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[mn]{x}-\sqrt[mn]{y}}$$

$$=\frac{a-b}{x-y}\cdot\left(\sqrt[mn]{x^{mn-1}}+\sqrt[mn]{x^{mn-2}y}+\sqrt[mn]{x^{mn-3}y^2}+\ldots\right.$$

$$\left.+\sqrt[mn]{y^{mn-1}}\right)=\frac{a-b}{a^n-b^m}\cdot\left(\sqrt[m]{a^{mn-1}}+\sqrt[m]{a^{mn-2}}\cdot\sqrt[n]{b}\right.$$

$$\left.+\sqrt[m]{a^{mn-3}}\cdot\sqrt[n]{b^2}+\ldots+\sqrt[n]{b^{mn-1}}\right).\quad\Bigg|\ \begin{matrix}x=a^n\\ y=b^m\end{matrix}$$

86) $$\frac{a-b}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[5]{b}}=\frac{a-b}{\sqrt[20]{a^5}-\sqrt[20]{b^4}}=\frac{a-b}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[20]{x}-\sqrt[20]{y}}$$

$$=\frac{a-b}{x-y}\cdot\left(\sqrt[20]{x^{19}}+\sqrt[20]{x^{18}y}+\sqrt[20]{x^{17}y^2}+\sqrt[20]{x^{16}y^3}+\ldots\right.$$

$$\left.+\sqrt[20]{y^{19}}\right)=\frac{a-b}{a^5-b^4}\cdot\left(a^4\sqrt[4]{a^3}+a^4\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[5]{b}+a^4\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[5]{b^2}\right.$$

$$\left.+a^4\cdot\sqrt[5]{b^3}+\ldots+b^3\sqrt[5]{b^4}\right).$$

87) $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{1}{\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{b^2}}=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}$$

$$=\frac{1}{x-y}\cdot\left(\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[6]{x^4y}+\sqrt[6]{x^3y^2}-\sqrt[6]{x^2y^3}+\sqrt[6]{xy^4}-\sqrt[6]{y^5}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\cdot\left(a\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[3]{ab}+a\sqrt[3]{b^2}-b\sqrt[3]{a^2}+b\sqrt[3]{ab}\right.$$

$$\left.-b\sqrt[3]{b^2}\right).\quad\Bigg|\ \begin{matrix}x=a^2\\ y=b^2\end{matrix}$$

88) $$\frac{a-b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}.$$

89) $$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{a-b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{1}{a-b}\cdot\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}\right.$$
$$\left.+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}\right).$$

90) $$\frac{a-b}{\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}}=\frac{a-b}{\sqrt[10]{a^2}+\sqrt[10]{b^2}}=\frac{a-b}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[10]{x}+\sqrt[10]{y}}$$
$$=\frac{a-b}{x-y}\cdot\left(\sqrt[10]{x^9}-\sqrt[10]{x^8y}+\sqrt[10]{x^7y^2}-\sqrt[10]{x^6y^3}+\sqrt[10]{x^5y^4}\right.$$
$$\left.-\sqrt[10]{x^4y^5}+\sqrt[10]{x^3y^6}-\sqrt[10]{x^2y^7}+\sqrt[10]{xy^8}-\sqrt[10]{y^9}\right)$$
$$=\frac{1}{a+b}\cdot\left(a\sqrt[5]{a^4}-a\sqrt[5]{a^3b}+a\sqrt[5]{a^2b^2}-a\sqrt[5]{ab^3}+a\sqrt[5]{b^4}\right.$$
$$\left.-b\sqrt[5]{a^4}+b\sqrt[5]{a^3b}-b\sqrt[5]{a^2b^2}+b\sqrt[5]{ab^3}-b\sqrt[5]{b^4}\right).$$

91) $$\frac{a-b}{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}}=\frac{a-b}{\sqrt[2m]{a^2}+\sqrt[2m]{b^2}}=\frac{a-b}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[2m]{x}+\sqrt[2m]{y}}$$
$$=\frac{a-b}{x-y}\cdot\left(\sqrt[2m]{x^{2m-1}}-\sqrt[2m]{x^{2m-2}y}+\sqrt[2m]{x^{2m-3}y^2}-\sqrt[2m]{x^{2m-4}y^3}\right.$$
$$\left.+\ldots-\sqrt[2m]{y^{2m-1}}\right)=\frac{1}{a+b}\cdot\left(\sqrt[m]{a^{2m-1}}-\sqrt[m]{a^{2m-2}b}\right.$$
$$\left.+\sqrt[m]{a^{2m-3}b^2}-\sqrt[m]{a^{2m-4}b^3}+\ldots-\sqrt[m]{b^{2m-1}}\right).$$

92) $$\frac{a-b}{\sqrt[5]{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt[10]{a^2}+\sqrt[10]{b^5}}=\frac{a-b}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[10]{x}+\sqrt[10]{y}}$$
$$=\frac{a-b}{a^2-b^5}\cdot\Big(a\sqrt[5]{a^4}-a\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt{b}+ab\sqrt[5]{a^2}-ab\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt{b}$$
$$+ab^2-b^2\sqrt[5]{a^4}\cdot\sqrt{b}+b^3\sqrt[5]{a^3}-b^3\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt{b}+b^4\sqrt[5]{a}$$
$$-b^4\sqrt{b}\Big).$$

93) $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{1}{\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{b^2}}=\frac{1}{a^3-b^2}\cdot\Big(a^2\sqrt{a}-a^2\sqrt[3]{b}$$
$$+a\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b^2}-ab+b\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{b^2}\Big).$$

94) $$\frac{a-b}{\sqrt[m]{a}+\sqrt[n]{b}}=\frac{a-b}{a^{2n}-b^{2m}}\cdot\Big(\sqrt[m]{a^{2mn-1}}-\sqrt[m]{a^{2mn-2}}\cdot\sqrt[n]{b}$$
$$+\sqrt[m]{a^{2mn-3}}\cdot\sqrt[n]{b^2}-\sqrt[m]{a^{2mn-4}}\cdot\sqrt[n]{b^3}+\ldots-\sqrt[n]{b^{2mn-1}}\Big).$$

95) $$\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt{b^{-1}}}=\frac{a-b}{\sqrt[6]{a^{-2}}+\sqrt[6]{b^{-3}}}=\frac{a-ab}{b^3-a^2}\cdot\Big(b^3\sqrt[3]{a}$$
$$-b^2\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}+ab^2-ab\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}+ab\sqrt[3]{a^2}-a^2\sqrt{b}\Big).$$

96) $$\frac{a-b}{\sqrt[-3]{a}+\sqrt[-2]{b}}=\frac{(a-b)\sqrt[6]{a^2b^3}}{\sqrt[6]{b^3}+\sqrt[6]{a^2}}=\frac{(a-b)\sqrt[6]{a^2b^3}}{a^2+b^3}\cdot\Big(b^2\sqrt{b}$$
$$-b^2\sqrt[3]{a}+b\sqrt[6]{a^4b^3}-ab+a\sqrt[6]{a^2b^3}+a\sqrt[3]{a^2}\Big).$$

97) $$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}=\frac{a+b}{\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{b^3}}=\frac{a+b}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}$$
$$=\frac{a+b}{a^2-b^3}\cdot\Big(a\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}+ab-b\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}$$
$$+b^2\sqrt[3]{a}-b^2\sqrt{b}\Big).$$

98) $$\frac{a+b}{\sqrt[m]{a}+\sqrt[n]{b}}=\frac{a+b}{a^{2n}-b^{2m}}\cdot\Big(\sqrt[m]{a^{2mn-1}}-\sqrt[m]{a^{2mn-2}}\cdot\sqrt[n]{b}$$
$$+\sqrt[m]{a^{2mn-3}}\cdot\sqrt[n]{b^2}-\ldots-\sqrt[n]{b^{2mn-1}}\Big).$$

99) $$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+b}=\frac{a+b}{\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{b^6}}=\frac{a+b}{a^2-b^6}\cdot\Big(a\sqrt[3]{a^2}-ab\sqrt[3]{a}$$
$$+ab^2-b^3\sqrt[3]{a^2}-b^4\sqrt[3]{a}-b^5\Big).$$

100) $$\frac{1}{a+b+\sqrt[m]{c}}=\frac{1}{s+\sqrt[m]{c}}=\frac{1}{\sqrt[2m]{s^{2m}}+\sqrt[2m]{c^2}}=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\sqrt[2m]{x}+\sqrt[2m]{y}}$$
$$=\frac{1}{(a+b)^{2m}-c^2}\cdot\Big((a+b)^{2m-1}-(a+b)^{2m-2}\cdot\sqrt[m]{c}$$
$$+(a+b)^{2m-3}\cdot\sqrt[m]{c^2}-(a+b)^{2m-4}\cdot\sqrt[m]{c^3}+\ldots-\sqrt[m]{c^{2m-1}}\Big).$$

101) $$\frac{1}{a+b-\sqrt[m]{c}}=\frac{1}{s-\sqrt[m]{c}}=\frac{1}{\sqrt[m]{s^m}-\sqrt[m]{c}}$$
$$=\frac{1}{(a+b)^m-c}\cdot\Big((a+b)^{m-1}+(a+b)^{m-2}\cdot\sqrt[m]{c}$$
$$+(a+b)^{m-3}\cdot\sqrt[m]{c^2}+(a+b)^{m-4}\cdot\sqrt[m]{c^3}+\ldots+\sqrt[m]{c^{m-1}}\Big);$$
vergleiche Aufgabe 83) oben.

102) $$\frac{1}{a+b\pm\sqrt{c}}=\frac{a+b\mp\sqrt{c}}{(a+b)^2-c}.$$

103) $$\frac{1}{a+b+\sqrt[3]{c}}=\frac{1}{\sqrt[6]{(a+b)^6}+\sqrt[6]{c^2}}=\frac{1}{(a+b)^6-c^2}\cdot\Big((a+b)^5$$
$$-(a+b)^4\cdot\sqrt[3]{c}+(a+b)^3\cdot\sqrt[3]{c^2}-(a+b)^2\cdot c$$
$$+(a+b)\cdot\sqrt[3]{c^4}-\sqrt[3]{c^5}\Big).$$

104) $$\frac{1}{a+b-\sqrt[3]{c^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)^3}-\sqrt[3]{c^2}}=\frac{1}{(a+b)^3-c^2}\cdot\Big((a+b)^2$$
$$+(a+b)\sqrt[3]{c^2}+\sqrt[3]{c^4}\Big).$$

105) $$\frac{1}{a+b+\sqrt[5]{c^4}}=\frac{1}{\sqrt[10]{(a+b)^{10}}+\sqrt[10]{c^8}}=\frac{1}{(a+b)^{10}-c^8}\cdot\Big((a+b)^9$$
$$-(a+b)^8\cdot\sqrt[10]{c^8}+(a+b)^7\cdot\sqrt[10]{c^{16}}-(a+b)^6\cdot\sqrt[10]{c^{24}}+\dots$$
$$-\sqrt[10]{c^{72}}\Big).$$

106) $$\frac{1}{a+b+\sqrt[m]{c^n}}=\frac{1}{\sqrt[2m]{(a+b)^{2m}}+\sqrt[2m]{c^{2n}}}$$
$$=\frac{1}{(a+b)^{2m}-c^{2n}}\cdot\Big((a+b)^{2m-1}-(a+b)^{2m-2}\cdot\sqrt[2m]{c^{2n}}$$
$$+(a+b)^{2m-3}\cdot\sqrt[2m]{c^{4n}}-(a+b)^{2m-4}\cdot\sqrt[2m]{c^{6n}}+\dots$$
$$-\sqrt[2m]{c^{2n(2m-1)}}\Big).$$

107) $$\frac{1}{a+b-\sqrt[m]{c^n}}=\frac{1}{\sqrt[m]{(a+b)^m}-\sqrt[m]{c^n}}$$

$$=\frac{1}{(a+b)^m-c^n}\cdot\Big((a+b)^{m-1}+(a+b)^{m-2}\cdot\sqrt[m]{c^n}$$

$$+(a+b)^{m-3}\cdot\sqrt[m]{c^{2n}}+\ldots+\sqrt[m]{c^{n(m-1)}}\Big).$$

108) $$\frac{1}{a+b-c\sqrt[4]{d^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(a+b)^4}-\sqrt[4]{c^4d^3}}$$

$$=\frac{1}{(a+b)^4-c^4d^3}\cdot\Big(\sqrt[4]{(a+b)^3}+\sqrt[4]{(a+b)^2}\cdot c\sqrt[4]{d^3}$$

$$+(a+b)\cdot c^2\sqrt[4]{d^6}+c^3\sqrt[4]{d^9}\Big).$$

Verbesserungen.

Seite 25 Frage 29 Nr. 2) lies $\frac{6-1}{3}$ anstatt $\frac{6-1}{2}$.

„ 33 Aufgabe 3) lies im Zähler des zweiten Gliedes $2\frac{1}{8}-6$ anstatt $2\frac{1}{3}-6$.

„ 45 Aufgabe 15) lies im Divisor beim ersten Gliede $0{,}4-\frac{11}{2{,}5}$ anstatt $0{,}4-\frac{11}{25}$.

„ 77 unten lies bis 79 anstatt bis 77).

„ 81 Aufgabe 3) lies im Zähler des vierten Gliedes $(a\times-1)^{2m}$ anstatt $(ax-1)^{2m}$.

„ 110 Frage 6) lies im Dividend a anstatt 5.

„ 119 nach Aufg. 79) lies 80) bis 108) anstatt 80) bis 100).

„ 121 Aufgabe 7) ist im Nenner des zweiten Faktors bei $\sqrt[9]{a^{2m}}$ der Radikator 9 undeutlich.

„ 171 Aufgabe 30) lies in der Antwort $a^{\frac{1}{m}-6}$ anstatt $a^{\frac{1}{m}}{}^{-6}$.

„ 203 Aufgabe 40) lies $z=-2$ anstatt $x=-2$.

„ 205 Aufgabe 48) lies $y=(-2)^2$ anstatt $y=4$.

Druck von J. P. Himmer in Augsburg.